Matematická analýza II

Edita Pelantová

katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT
Trojanova 13, 120 00 Praha

Předmluva

Skriptum, jehož druhé vydání držíte v rukách, je určeno studentům prvního ročníku FJFI jako učební pomůcka k přednáškám z matematické analýzy. Pokrývá látku přednášenou v letním semestru. Přestože je výklad doplněn ilustrujícími příklady, nemůže nahradit cvičení k přednášce. Důležitým doplňkem tohoto skripta jsou sbírky příkladů: *Cvičení z matematické analýzy, Diferenciální počet* (J. Mareš, J. Vondráčková) a *Cvičení z matematické analýzy, Integrání počet a řady* (E. Pelantová, J. Vondráčková).

Diferenciální a integrální počet jedné reálné proměnné je oblastí matematiky, ve které první učebnice vznikla před více než 400 lety. Poté celé generace matematiků měnily obsah, použitý formalizmus i metody výkladu. Na tomto místě chci však zdůraznit roli mé bývalé kolegyně Jany Vondráčkové, která svými přednáškami v minulých letech rozhodujícím způsobem ovlivnila náplň předmětu Matematická analýza na FJFI. Dále chci poděkovat Miloslavu Znojilovi za velice pečlivé přečtení rukopisu i za cenné připomínky, které pomohly zvýšit úroveň textu. Rovněž jsem vděčná mnohým studentům, kteří v mých poznámkách z přednášky a v prvním vydání skripta odstranili četné typografické i věcné chyby; studentovi Václavu Potočkovi vděčím za pomoc s obrázky, které jsem v textu použila.

Praha, listopad 2014 Autorka

Seznam použitých symbolů

$\in$	symbol pro příslušnost prvku k množině
$\cap$, $\cup$	průnik, resp. sjednocení množin
$\subset$	podmnožina
$\exists$	existenční kvantifikátor
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\sum_{k=1}^{n}$	součet n sčítanců
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\overline{\mathbb{C}}$	rozšířená množina komplexních čísel
$\emptyset$	prázdná množina
$\lfloor x \rfloor$	největší celé číslo nepřevyšující x
$:=$, $=:$	rovnost definující nový objekt
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\square$	označení konce důkazu
$\binom{\alpha}{k}$	kombinační číslo α nad k
$T_{n,f,a}$	n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a
R_n	n-tý zbytek v Taylorově vzorci
$\mathrm{d}\, f(x)$	diferenciál funkce f v bodě x
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$	symbol pro nekonečnou řadu i její součet
$\int$	znak integrálu
$\int f$	množina primitivních funkcí k funkci f
$\int_a^b f$	určitý integrál funkce f od a do b

Obsah

Kapitola 1

Aproximace funkce polynomem

1.1 Taylorův vzorec

Polynomy jsou funkce, jejichž hodnotu ve zvoleném bodě umíme snadno vypočítat. Pomocí polynomů lze rovněž dobře aproximovat některé další "rozumné"funkce. V této kapitole budeme uvažovat pouze reálné polynomy

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad \text{kde} \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

tedy funkce $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Abychom tohoto zápisu mohli používat i pro hodnotu $x = 0$, pokládáme $0^0 = 1$. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme index n stupněm polynomu p. V případě, že všechny koeficienty a_i jsou nulové, nazveme p nulovým polynomem a jeho stupeň nedefinujeme. Budeme-li však mluvit o polynomech stupně nanejvýš n, budeme mezi tyto polynomy počítat i nulový polynom.

Ze základní věty algebry plyne, že koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ daného polynomu p jsou určeny jednoznačně. Podle binomické věty je

$$x^k = \Big((x-a)+a\Big)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x-a)^i a^{k-i}\,, \tag{1.2}$$

a proto lze pro libovolné pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$ vyjádřit polynom p rovněž ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k, \quad \text{kde} \;\; b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Pro polynom p daný vztahem (1.1) a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_n$ rovněž určeny jednoznačně. Navíc z vyjádření (1.2) plyne, že koeficient b_n je nenulový právě tehdy, když stupeň polynomu p je n.

Věta 1.1.1. *Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou* *derivaci. Potom existuje právě jeden polynom T_n stupně $\leq n$ takový, že*

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \textit{pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tento polynom má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k$$

a nazýváme jej n-tým **Taylorovým polynomem** *funkce f v bodě a.*

Důkaz. Uvažujme polynom p stupně nanejvýš n ve tvaru (1.3). Jeho k-násobným zderivováním a dosazením bodu a dostaneme $p^{(k)}(a) = k!\, b_k$. Protože hledáme polynom, pro který by k-tá derivace v bodě a byla rovna k-té derivaci funkce f v bodě a pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$, musí platit

$$k!\, b_k = f^{(k)}(a) \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{pro každé } k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Koeficienty b_k jsou proto jednoznačně určeny, a tedy existuje jediný polynom hledaných vlastností. □

Poznámka. Není-li z kontextu jasné, v jakém bodě a jaké funkci přiřazujeme Taylorův polynom, použijeme místo stručného T_n označení $T_{n,f,a}$.

Taylorovy polynomy důležitých funkcí v bodě $a = 0$.

- Pro funkci $f(x) = e^x$ je $f^{(k)}(x) = e^x$. Proto $f^{(k)}(0) = 1$ pro každé $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k}$$

- Pro funkci $f(x) = \sin x$ je $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ a $f^{2k+1}(x) = (-1)^k \cos x$. Po dosazení bodu $a = 0$ dostaneme $f^{(2k)}(0) = 0$ a $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Proto

$$\boxed{f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}}$$

- Pro funkci $f(x) = \cos x$ je $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ a $f^{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$. Po dosazení bodu $a = 0$ dostaneme $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ a $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Proto

$$
\boxed{f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\; x^{2k}}
$$

- Označme $f(x) = \ln(1+x)$. Platí $f(0) = 0$, a protože pro přirozené k je k-tá derivace $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$, dostaneme $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Taylorův polynom má tvar

$$
\boxed{f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\; x^k}
$$

- Uvažujme $\alpha \in \mathbb{R}$ a funkci $f(x) = (1+x)^\alpha$. Její k-tá derivace pro každé celé $k \geq 0$ má tvar $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Po dosazní bodu 0 dostaneme $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$.
  Definujme výraz čtený "α nad k"takto

$$
\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{když } k = 0\,, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{když } k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}
$$

  Číslo "α nad k"je tedy definované pro libovolné reálné α. To, že jsme zvolili stejné značení, jaké je zvykem používat pro kombinační čísla, není náhodné. Když α je přirozené, naše definice se shoduje s definicí kombinačního čísla $\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$. Při tomto značení můžeme zapsat Taylorův polynom takto

$$
\boxed{f(x) = (1+x)^\alpha \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k}
$$

Motivací pro Taylorovy polynomy byla aproximace funkce. Proto nás zajímá, jaké chyby se dopustíme, když hodnotu funkce v bodě x nahradíme hodnotou Taylorova polynomu ve stejném bodě.

Definice 1.1.2. Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Položme $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$. Pak vztah

$$
f(x) = T_n(x) + R_n(x)
$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_n(x)$ nazýváme n-tým zbytkem v Taylorově vzorci.

Abychom v dalším textu nemuseli opakovat u vět stejné předpoklady, zavedeme následující úmluvu.

Úmluva. O funkci f, bodě $a \in \mathbb{R}$ a přirozeném čísle n řekneme, že splňují základní předpoklady **(ZP)**, když existuje okolí H_a takové, že platí

1) v každém $x \in H_a$ existuje konečná $(n-1)$-ní derivace funkce f a
2) v bodě a existuje konečná n-tá derivace funkce f.

Věta 1.1.3. *Nechť pro f, a, n platí (ZP). Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí*

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Důkaz. Z definice zbytku plyne, že

$$R_n(a) = R_n'(a) = R_n''(a) = \ldots = R_n^{(n-1)}(a) = R_n^{(n)}(a) = 0\,.$$

Ze (ZP) a definice n-té derivace dostaneme

$$0 = R_n^{(n)}(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{(x-a)} = \lim_{x \mapsto a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x-a)}\,.$$

Existence limity a (ZP) nám umožní $(n-1)$-krát použít l'Hospitalovo pravidlo na výrazy typu "$\frac{0}{0}$". Dostaneme

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \mapsto a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \mapsto a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}\,.$$

To dokazuje tvrzení věty. □

Peanův tvar zbytku. Označíme-li $\omega_n(x) := \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$, lze Taylorův vzorec napsat ve tvaru

$$f(x) \;=\; T_n(x) \;+\; \underbrace{\omega_n(x).(x-a)^n}_{\text{Peanův tvar zbytku}} \quad , \qquad \text{kde} \;\; \lim_{x \mapsto a} \omega_n(x) = 0\,.$$

Zápis pomocí tohoto tvaru zbytku lze aplikovat na výpočet limit.

Příklad 1.1.4. Počítame limitu $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$. Použijeme Taylorův vzorec pro funkci $f(x) = e^x$, bod $a = 0$ a $n = 2$. Dostaneme

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{T_2(x) + \omega_2(x)x^2 - x - 1}{x^2} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \omega_2(x)x^2 - x - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\mapsto 0} \left(\omega_2(x) + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.1.5. Pro výpočet následující limity

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x - T_3(x) - \omega_3(x)x^3}{x^3} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} - \omega_3(x)x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

jsme použili Taylorův polynom stupně 3 pro funkci $\sin x$ v bodě $a = 0$. Tuto limitu jsme mohli spočítat i podle vícenásobné aplikace l'Hospitalova pravidla. Proto si uveďme ještě jeden příklad.

Příklad 1.1.6. Peanova zbytku pro funkci logaritmus

$$\ln(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \omega_2(y).y^2, \quad \text{kde} \quad \lim_{y\mapsto 0} \omega_2(y) = 0$$

využijeme pro výpočet limity

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \left(x - x^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\right) = \lim_{x\mapsto +\infty} \left(x - x^2\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \omega_2(1/x).\frac{1}{x^2}\Big)\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto +\infty} \tfrac{1}{2} + \omega_2(1/x) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.1.7. Určeme limitu posloupnosti $\left(\sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n}\big)\right)_{n=1}^{\infty}$. Využijeme Taylorův vzorec funkce $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ pro první Taylorův polynom s Peanovým tvarem zbytku, tj. $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + x\omega_1(x)$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2+n} = n\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} = n\Big(1 + \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{n}\omega_1(\tfrac{1}{n})\Big) = n + \tfrac{1}{2} + \omega_1(\tfrac{1}{n})\,.$$

Heineova věta, spojitost funkce $\sin^2 x$ a fakt, že $\sin^2 x$ má periodu π, implikují

$$\sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n}\big) = \sin^2\Big(\pi n + \tfrac{\pi}{2} + \pi\omega_1(\tfrac{1}{n})\Big) = \sin^2\Big(\tfrac{\pi}{2} + \pi\omega_1(\tfrac{1}{n})\Big) \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \sin^2\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = 1\,.$$

Aplikace Taylorova vzorce k vyšetřování průběhu funkce.

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu a derivace až do stupně k a nechť

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0 \neq f^{(k)}(a)\,.$$

Pak podle Taylorova vzorce

$$f(x) = T_k(x) + \omega_k(x).(x-a)^k = f(a) + \underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x)\right)}(x-a)^k\,.$$

Výraz $\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x)\right)$ označený svorkou má pro $x \mapsto a$ limitu rovnou $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, což je dle předpokladu nenulové číslo. Proto existuje okolí H_a, na kterém tento výraz nemění znaménko. Podle definice lokálního extrému můžeme rozhodnout:

- Je-li k sudé, pak je v bodě a lokální extrém, přičemž pro $f^{(k)}(a) > 0$ je v bodě a lokální minimum, v opačném případě je v bodě a lokální maximum.
- Je-li k liché, pak je v bodě a inflexe.

Uvedené použití Taylorova vzorce není zdaleka nejdůležitější. Další vlastnost lze heslovitě vyslovit jako

"Taylorův polynom je nejlepší aproximace"

a přesně formulovat ve větě.

Věta 1.1.8. (o nejlepší aproximaci) *Nechť pro f, a, n platí (ZP) a nechť $Q(x)$ je polynom stupně $\leq n$, různý od Taylorova polynomu $T_n(x)$ příslušejícího funkci f v bodě a. Pak existuje takové okolí H_a, že*

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \qquad \textit{pro každé } \ x \in H_a - \{a\}\,.$$

Důkaz. Uvažujme polynomy T_n a Q ve tvaru

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k \quad \text{a} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k.$$

Protože se jedná o dva různé polynomy, platí

$$i := \min\{\ k \mid \alpha_k \neq \beta_k\} \leq n\,.$$

Použijeme vyjádření funkce f pomocí Peanova zbytku $f(x) = T_n(x) + \omega_n(x).(x-a)^n$. Pro $x \neq a$ dostaneme $\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| =$

$$\left|\frac{T_n(x) + \omega_n(x).(x-a)^n - Q(x)}{(x-a)^i}\right| = \left|\frac{\sum_{k=i}^{n}(\alpha_k - \beta_k)(x-a)^k + \omega_n(x).(x-a)^n}{(x-a)^i}\right| =$$

$$= \left|(\alpha_i - \beta_i) + \sum_{k=i+1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)(x-a)^{k-i} + \omega_n(x)(x-a)^{n-i}\right|.$$

Tedy pro x jdoucí k a je

$$\left|\frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^i}\right| \mapsto |\alpha_i - \beta_i| > 0\,,$$

zatímco

$$\left|\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^i}\right| \mapsto 0\,.$$

Z věty o nerovnostech v limitě plyne, že existuje okolí H_a tak, že

$$\left|\frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^i}\right| > \left|\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^i}\right| \quad \text{pro každé } \ x \in H_a - \{a\}\,.$$

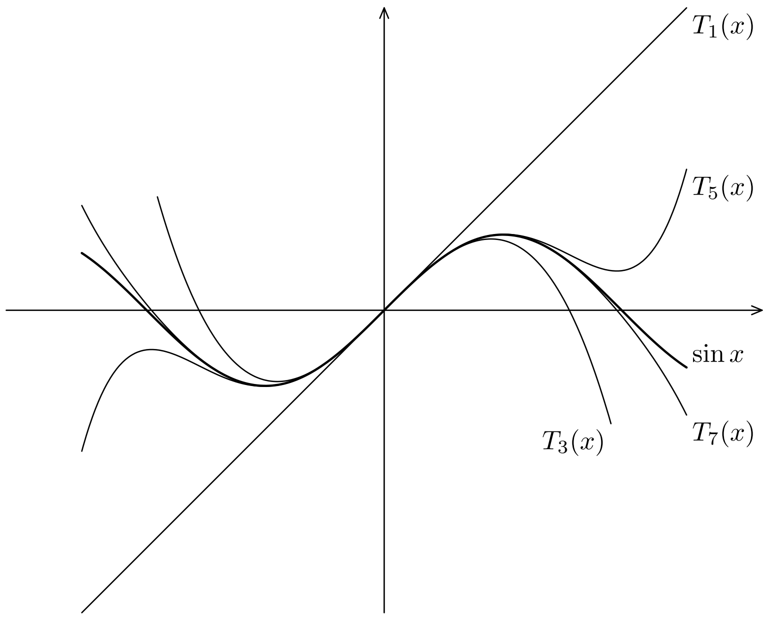
Po vynásobení poslední nerovnosti kladným $|(x-a)^i|$ dostaneme tvrzení věty. □

Důsledek 1.1.9. *Když $T_{n-1}(x) \neq T_n(x)$, pak pro jisté okolí H_a platí*

$$|T_n(x) - f(x)| < |T_{n-1}(x) - f(x)| \ \ \textit{pro každé} \ \ x \in H_a - \{a\},$$

tedy každý další Taylorův polynom aproximuje funkci f lépe.

Následující obrázek zachycuje, jak se s rostoucím n zlepšuje aproximace funkce sinus.



V důkaze věty jsme nevyužili konkrétní tvar Taylorova polynomu, ale pouze jeho vlastnost, že $|f(x) - T_n(x)|/|(x-a)^n| \mapsto 0$. Je-li tedy pro nějaký polynom p stupně nanejvýš n limita podílu $|f(x) - p(x)|/|(x-a)^n|$ pro x blížící se k a rovna 0, je polynom p nejlepší aproximací. Proto další větu lze uvést bez důkazu.

Věta 1.1.10. *Nechť pro f, a, n platí (ZP). Nechť dále pro polynom p stupně nejvýše n a reálnou funkci $\tilde{\omega}$ platí, že*

$$f(x) = p(x) + (x-a)^n.\ \tilde{\omega}(x), \quad \textit{kde} \ \ \lim_{x \mapsto a} \tilde{\omega}(x) = 0\,.$$

Pak p je n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a.

Příklad 1.1.11. Určeme Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{x^2}$ v bodě $a = 0$.

Chceme-li najít $T_n(x)$ přímo z definice potřebujeme určit $f^{(k)}(0)$ pro každé k. Protože $f(x)$ je funkce sudá, je každá její lichá derivace $f^{(2k+1)}(x)$ funkce lichá, a tedy $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Z toho už můžeme odvodit, že $T_{2n} = T_{2n+1}$.

Zajímají nás tedy pouze $f^{(2k)}(0)$. K tomu ale potřebujeme určit všechny derivace $f^{(k)}(x)$. Několikanásobným derivováním funkce $f(x)$ zjistíme, že není jednoduché odvodit tvar $f^{(k)}(x)$ pro obecné k. Myšlenku zkonstruovat Taylorův polynom přímo z definice opustíme a využijeme Taylorova vzorce pro funkci e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k + x^n \omega_n(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x\to 0} \omega_n(x) = 0.$$

Protože tento vztah platí pro každé reálné x, lze dosadit za proměnnou do rovnosti x^2. Dostaneme

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^{2k} + x^{2n}\omega_n(x^2)\,.$$

Z věty o limitě složené funkce pak také

$$\lim_{x\to 0} \omega_n(x^2) = 0.$$

Z předchozí věty plyne, že

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^{2k}.$$

Z toho, že víme, čemu se rovná koeficient u x^{2k} v Taylorově polynomu, odvodíme přímo těžko určitelnou $2k$-tou derivaci

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{1}{k!} \quad \Longrightarrow \quad f^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{k!}\,.$$

Poznámka. Další pomůckou, která nám umožní hledat Taylorovy polynomy, je vztah mezi Taylorovým polynomem funkce a Taylorovým polynomem její derivace.

$$\big(T_{n,f,a}(x)\big)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}\, (x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\, (x-a)^k = T_{n-1,f',a}(x)\,.$$

Ze znalosti $(n-1)$-ního Taylorova polynomu derivace funkce odvodíme n-tý Taylorův polynom původní funkce:

$$T_{n-1,f',a}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k \quad \Longrightarrow \quad T_{n,f,a}(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\,.$$

Příklad 1.1.12. Naším úkolem bude určit Taylorův polynom funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v bodě 0.

Určit k-tou derivaci funkce pro obecné k nevypadá schůdně. Zato umíme určit Taylorův polynom derivace. Využijeme znalosti Taylorova vzorce pro funkci $(1+x)^\alpha$ se speciální volbou $\alpha = -1$:

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} x^k + x^n \omega_n(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x\to 0} \omega_n(x) = 0\,.$$

Jelikož $\binom{-1}{k} = (-1)^k$, dostaneme po nahrazení proměnné x výrazem x^2 rovnost

$$\big(\operatorname{arctg} x\big)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\omega_n(x^2)\,.$$

To už implikuje, že Taylorův polynom derivace funkce $\operatorname{arctg} x$ je polynom $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$. Předchozí poznámka a lichost funkce arctg pak dává řešení našeho úkolu

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \Longrightarrow \quad T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\,.$$

1.2 Odhad chyby v Taylorově vzorci

Větou o nejlepší aproximaci je zaručena existence okolí H_a, ve kterém je chyba aproximace Taylorovým polynomem menší než při použití jiného polynomu. V dalším kroku nás zajímá, jaké chyby se dopustíme pro konkrétní x.

Věta 1.2.1. (Taylorova) *Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou (n+1)-ní derivaci a nechť $x \in H_a$. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ má tvar*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

Číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x,a.

Důkaz. Zvolme pevně $x \in H_a - \{a\}$, označme J uzavřený interval s krajními body a a x a na něm definujme funkci

$$\psi(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}\,(x-z)^k\,.$$

Pro takto definovanou funkci platí

$$\psi'(z) = f'(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!} (x-z)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!} (x-z)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n \,. \quad (1.4)$$

Navíc

$$\psi(x) = f(x) \;\text{ a }\; \psi(a) = T_n(x)\,. \quad (1.5)$$

Dále uvažujme funkci $\phi(z)$ spojitou na J, která má uvnitř tohoto intervalu konečnou nenulovou derivaci. Tím máme splněny předpoklady Cauchyho věty o přírůstku funkce. Proto existuje bod ξ z vnitřku intervalu J takový, že

$$\frac{\psi(x) - \psi(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\phi'(\xi)}\,.$$

Po dosazení z (1.4) a (1.5) dostaneme

$$\frac{R_n(x)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{f(x) - T_n(x)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \frac{1}{\phi'(\xi)}\,. \quad (1.6)$$

Abychom dokončili důkaz, stačí zvolit funkci $\phi(z) = (x-z)^{n+1}$. Dosadíme-li do (1.6) za $\phi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$, získáme tvrzení věty. $\square$

Poznámka k důkazu. Pokud místo funkce $\phi(z) = (x-z)^{n+1}$ zvolíme v posledním kroku důkazu funkci $\phi(z) = z$, dostaneme

$$\frac{R_n(x)}{x-a} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n$$

a odsud získáme tzv. Cauchyho tvar zbytku. To, který ze zbytků je výhodnější použít, závisí na konkrétní funkci f.

Langrangeův tvar zbytku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Cauchyho tvar zbytku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a)$$

Oba tvary zbytku $R_n(x)$ odvodíme v kapitole o určitém integrálu jiným způsobem (možná jednodušším).

Příklad 1.2.2. Ve fyzikálních výpočtech (např. u matematického kyvadla) se lze setkat s aproximací $\sin x \doteq x$ pro jisté malé hodnoty x. Chceme-li však počítat hodnoty funkce sinus a kosinus pro všechny reálné hodnoty x přesněji - řekněme s přesností 10^{-8}, jak to dělá běžná kalkulačka - potřebujeme lepší aproximaci. Kvůli periodicitě, symetriím a vztahům mezi funkcemi sin a cos stačí umět počítat s dostatečnou přesností hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Využijeme Taylorova vzorce a Lagrangeova tvaru zbytku pro stupeň Taylorova polynomu $2n+2$,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \;+\; \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\cos(\xi_{x,n})}{(2n+3)!}\, x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)} .$$

Odhadněme velikost zbytku pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$|R_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: A_n .$$

Už pro $n=4$ je $A_n < 1,41 \times 10^{-9}$. Ze vztahu

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

máme hodnotu $\sin x$ s chybou menší než 10^{-8} pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Příklad 1.2.3. Funkce $f(x) = e^x$ je nekonečněkrát diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$. Pro bod $a = 0$ je její zbytek v Lagrangeově tvaru

$$R_n(x) = \tfrac{e^\xi}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a každé } x \in \mathbb{R}, \text{ kde } |\xi| < |x|.$$

Abychom nezapomněli na závislost ξ na x a n, budeme používat značení $\xi \equiv \xi_{x,n}$. Nerovnost $|\xi_{x,n}| < |x|$ implikuje $e^{\xi_{x,n}} < e^{|x|}$. Můžeme proto odhadnout

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\xi_{x,n}}}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longmapsto} 0 \quad \text{pro pevné } x \in \mathbb{R} .$$

Lze tedy napsat rovnost

$$\boxed{e^x = \lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}}$$

Funkci e^x se nám podařilo napsat jako limitu jejích Taylorových polynomů. Použili jsme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 1.2.4. *Nechť funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ nekonečněkrát diferencovatelná a $x \in D_f$. Pak*

$$f(x) = \lim_{n \mapsto +\infty} T_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} R_n(x) = 0.$$

Důkaz. Tvrzení získáme limitním přechodem v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. □

Poznámka. Snadno odvodíme nutnou podmínku pro to, aby $\lim T_n(x)$ byla rovna číslu $f(x)$:

$$\lim_{n \mapsto +\infty} T_n(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \big(T_n(x) - T_{n-1}(x)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = 0\,.$$

Zobecněný binomický vzorec

Zkoumejme, kdy funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$ je rovna limitě svých Taylorových polynomů. Připomeňme, že $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Odtud jsme odvodili $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$.

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je funkce $(1+x)^\alpha$ polynomem a pro $n > \alpha$ je n-tá derivace identicky rovna 0. Proto $T_\alpha(x) = T_{\alpha+1}(x) = \dots$. Vztah $f(x) = T_\alpha(x)$ je vlastně obyčejným binomickým vzorcem, a tedy platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Uvažujme $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zkoumejme nejdříve nutnou podmínku odvozenou v předchozí poznámce. Pro výpočet limity

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \lim_{n \mapsto +\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

použijeme "podílové" kritérium [1]. Dostaneme

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|} = \frac{n-\alpha}{n+1}\,|x| \overset{n\to\infty}{\longmapsto} |x| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\right| = \begin{cases} +\infty & \text{pro } |x| > 1 \\ 0 & \text{pro } |x| < 1 \end{cases}$$

Rovnost $(1+x)^\alpha = \lim\ T_n(x)$ má proto šanci platit pouze pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.
Uvažujeme nejprve $x \in (-1, 1)$.
Po dosazení do Cauchyho tvaru zbytku dostaneme

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,n})}{n!}\,(x - \xi_{x,n})^n\, x = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\,(1+\xi_{x,n})^{\alpha-n-1}\,(x-\xi_{x,n})^n\, x$$

[1] Nechť pro kladnou posloupnost (a_n) existuje $\ell := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Je-li $\ell > 1$, pak $\lim a_n = +\infty$, zatímco je-li $\ell < 1$, pak $\lim a_n = 0$.

$$= \alpha \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \, (1+\xi_{x,n})^{\alpha-1} \left(\frac{1-\frac{\xi_{x,n}}{x}}{1+\xi_{x,n}} \right)^n .$$

Výrazy obsahující $\xi_{x,n}$ odhadneme tak, abychom $\xi_{x,n}$ vyloučili. Využijeme toho, že pro kladné x je $0 < \xi_{x,n} < x$ a pro záporné x je $x < \xi_{x,n} < 0$. Snadnými úpravami, jež přenecháme čtenáři, ověříme, že

$$0 < \frac{1-\frac{\xi_{x,n}}{x}}{1+\xi_{x,n}} < 1 \qquad \text{a} \qquad 0 < (1+\xi_{x,n})^{\alpha-1} < \max\{(1+x)^{\alpha-1}, 1\} =: K\,.$$

Odhadem a použitím "podílového"kritéria dostaneme

$$|R_n(x)| \leq \left| K\alpha \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right| \quad \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \quad 0\,.$$

Proto platí **zobecněný binomický vzorec**

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \ \text{ pro } \ \text{každé } x \in (-1,1)}$$

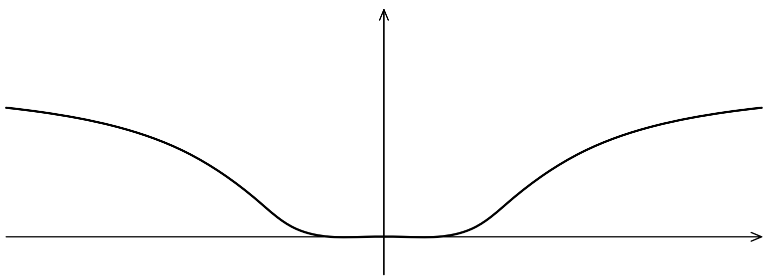
Platnost předchozí rovnosti lze pro některá α rozšířit i na hodnoty $x = 1$ nebo $x = -1$. Diskusi této otázky odložíme na pozdější dobu, kdy budeme mít k dispozici silnější matematický aparát.

Špatné chování Taylorových polynomů

Následující příklad ukazuje, že zdaleka ne každou funkci lze dobře aproximovat jejím Taylorovým polynomem. Mějme funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } \ x \neq 0\,, \\ 0 & \text{pro } \ x = 0\,. \end{cases}$$

Průběh funkce zachycuje obrázek.



Jelikož $\lim\limits_{x\to 0} f = 0 = f(0)$, funkce f je spojitá v bodě 0, pro výpočet derivace v bodě 0 lze použít Darbouxovu větu,

$$f'(0) = \lim_{x \mapsto 0} f'(x) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{2}{x^3}\ e^{-\frac{1}{x^2}} = 0\,.$$

Poslední rovnost plyne z obecnějšího vztahu, který platí pro $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \mapsto 0\pm} \frac{1}{x^k}\ e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \mapsto 0\pm} \frac{\frac{1}{x^k}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y \mapsto \pm\infty} \frac{y^k}{e^{y^2}} = \text{ dle l'Hospitala } = 0\,. \tag{1.7}$$

Protože $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'$, je první derivace spojitá v bodě 0, a proto $f''(0)$ lze spočítat opět pomocí Darbouxovy věty. Pro výpočet limity využijeme (1.7),

$$f''(0) = \lim_{x \mapsto 0}\ f''(x) = \lim_{x \mapsto 0}\ \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)\ e^{-\frac{1}{x^2}} = 0\,.$$

Indukcí snadno nahlédneme, že $f^{(n)}(x)$ má tvar

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)\ e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,$$

kde $P(y)$ je polynom. Opakovaným použitím (1.7) a Darbouxovy věty dostaneme

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Taylorův polynom funkce f má tedy tvar $T_n(x) = 0$ pro každé přirozené n a zbytek má z definice tvar

$$R_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pro každé } x \neq 0\,.$$

Podmínka $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} R_n(x) = 0$, která je nutná k tomu, aby se funkce rovnala limitě svých Taylorových polynomů, není splněná pro žádné nenulové x.

Na závěr kapitoly zavedeme termín diferenciál, který je běžně používán v různých aplikacích. Nechť funkce f má v bodě x první derivaci. Taylorův vzorec pro $n = 1$ má tvar

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h\ +\ h.\omega(x+h)\ , \quad \text{kde} \quad \lim_{h \mapsto 0} \omega(x+h) = 0.$$

Výraz $f'(x).h$ nazýváme **diferenciál**[2] a značíme

$$\mathrm{d}\, f(x) = f'(x).h$$

Například $\quad \mathrm{d}\, x^3 = 3x^2.h, \qquad \mathrm{d}\, \sin x = \cos x.h$

Protože $\mathrm{d}\, x = 1.h$, nahrazuje se často h v zápisu diferenciálu výrazem $\mathrm{d}\, x$. Diferenciál lze tedy zapsat

$$\mathrm{d}\, f(x) = f'(x).\mathrm{d}\, x\ .$$

Tento zápis vede i k tzv. Leibnizově symbolice pro derivaci funkce

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = f'(x)\ .$$

[2]Diferenciál vystihuje přírůstek funkce v bodě $x + h$ oproti bodu x jenom přibližně. Pouze pro $h = 0$ je hodnota diferenciálu přesná (a to 0). To nebránilo Leibnizovi a mnohým dalším, aby pracovali s diferenciálem jako s přesnou hodnotou i pro nenulové h. Přitom správnost svých dedukcí (a ty správné byly!) obhajovali tím, že h, se kterým pracují, je nekonečně malá, tzv. infinitezimální veličina. Rovněž Isaac Newton používal nekonečně malé veličiny, říkal jim fluxe. Ozvaly se však i kritické hlasy, které přirovnávaly infinitezimální veličiny k "duchům zemřelých veličin"- ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.

Kapitola 2

Číselné řady

2.1 Základní pojmy

Tato kapitola je věnována limitám číselných posloupností, jejichž n-tý člen vznikl součtem prvních n členů jiné posloupnosti. S limitami takových posloupností jsme se už setkali a známe

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1\ , \qquad \lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e \quad \text{a} \quad \lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2\,.$$

Podobné limity hrají v matematice významnou roli. V kapitole Taylorův vzorec jsme už měli možnost vidět, jak lze hodnoty známých funkcí vyjádřit jako limity posloupností tohoto typu. Pro každé $x\in\mathbb{R}$ například platilo $\sin x=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$, atd.

Definice 2.1.1. Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejich **částečných součtů** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definujeme vztahem

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n \quad \text{pro každé} \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Dvojici posloupností $\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ pak nazýváme **číselnou řadou** a značíme ji symbolem $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, kde a_n nazýváme n-tým **členem** číselné řady. Existuje-li konečná limita

$$s=\lim_{n\mapsto+\infty}s_n,$$

říkáme, že **řada konverguje** a má součet s. V opačném případě říkáme, že **řada diverguje**.

Poznámka. Uveďme tři komentáře k předchozí definici.

1. Divergentní řady ještě dělíme na **podstatně divergentní**, pro něž $\lim s_n$ existuje, ale není konečná, a na **oscilující**, pro něž $\lim s_n$ neexistuje.

2. Jestliže indexování původní číselné posloupnosti (a_n) začíná jiným celým číslem než jedničkou, upravujeme i indexování číselné řady. Např. k posloupnosti $(a_n)_{n\geq 5}$ přiřazujeme řadu $\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$, atd.

3. Pro řadu (tedy dvojici posloupností) i pro její součet (tedy číslo) se vžilo stejné značení $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. My u této zvyklosti zůstaneme a budeme zapisovat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Nevinná nedbalost této konvence nejenže nezpůsobí žádné zmatky, ale dá nám i možnost psát

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad \text{osciluje}\,.$$

Definice 2.1.2. Řekneme, že řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ mají **stejný charakter**, když obě současně konvergují, nebo obě současně oscilují, nebo obě jsou současně podstatně divergentní.

Poznámka. Změníme-li hodnoty a_n pro konečně mnoho indexů n, charakter nové a původní řady je stejný. Speciálně, když vynecháme konečný počet členů posloupnosti, máme řadu se stejným charakterem, ale jiným součtem.

Věta 2.1.3. (nutná podmínka konvergence) *Když řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje, pak*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = 0\ .$$

Důkaz. Konečnost limity posloupností (s_n) implikuje $0 = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$. □

Příklad 2.1.4. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ diverguje, protože $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Příklad 2.1.5. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, i když $\lim \frac{1}{n} = 0$. Tento příklad demonstruje, že podmínka $\lim a_n = 0$ není podmínkou postačující.

Jak už bylo zmíněno v úvodu, řady jsou speciálním případem posloupností. Proto mnoho vět pro řady je okamžitým důsledkem vět platných pro posloupnosti a uvádíme je proto bez důkazu.

Věta 2.1.6. *Nechť* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *jsou číselné řady.*

- *Když řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konvergují, pak také řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje.*

- *Když řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje a řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje, pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ *diverguje.*

- *Nechť $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n)$ mají stejný charakter.*

Věta 2.1.7. (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence) *Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big(\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \Big| < \varepsilon \Big).$$

Nejdříve se budeme zabývat chováním řad s kladnými členy. Že právě tyto řady mají důležité postavení mezi řadami, zdůvodňuje následující důsledek Bolzanova-Cauchyova kritéria.

Důsledek 2.1.8. *Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.*

Důkaz. Konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je podle předchozí věty ekvivalentní tvrzení

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big(\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \Big| < \varepsilon \Big).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \Big| \leq \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \Big| < \varepsilon \,.$$

To znamená, že Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence je splněna i pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

□

Definice 2.1.9. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada.

- Konverguje-li také řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**.
- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**.

2.2 Řady s kladnými členy

V této kapitole budeme zkoumat konvergenci řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, u kterých $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě je posloupnost částečných součtů rostoucí, protože

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy $\lim s_n$ existuje (konečná nebo $+\infty$). To znamená, že **každá řada s kladnými členy je buď konvergentní nebo podstatně divergentní**.

Tři elementární pozorování plynou z věty o nerovnostech v limitách. Nazýváme je **srovnávací kritéria**.

Věta 2.2.1. *Nechť pro nezáporné posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *platí, že* $a_n \le b_n$ *od jistého indexu* n_0*.*

- *Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje.*
- *Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*

Věta 2.2.2. *Nechť pro kladné posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *platí, že* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *od jistého indexu* n_0*.*

- *Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje.*
- *Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. U nerovností $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}$ s indexy $k = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ vynásobíme levé a pravé strany. Po zkrácení dostaneme

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \le \frac{b_n}{b_{n_0}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\, b_n \qquad \text{pro každé } n\in\mathbb{N},\ n>n_0\,.$$

Protože řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\, b_n$ mají stejný charakter, plyne tvrzení dokazované věty z věty 2.2.1. □

Věta 2.2.3. *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jsou kladné posloupnosti takové, že existuje*

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\ .$$

- *Pokud* $L < +\infty$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
- *Pokud* $L > 0$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*
- *Pokud* $0 < L < +\infty$*, pak řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *mají stejný charakter.*

Důkaz. Třetí bod věty je přímým důsledkem dvou předchozích bodů a toho, že řady s kladnými členy mohou pouze konvergovat nebo podstatně divergovat. Proto stačí dokázat první dvě tvrzení.

Pokud $L < +\infty$, pak od jistého indexu n_0 platí nerovnost $\frac{a_n}{b_n} < L+1$. To implikuje $a_n < (L+1)b_n$. Předpoklad konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ vynucuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(L+1)b_n$. Podle věty 2.2.1 nerovnost $a_n < (L+1)b_n$ dává konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pokud $L > 0$ je konečné, pak od jistého indexu n_0 platí nerovnost $\frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}$ nebo ekvivalentně $a_n > \frac{L}{2}\, b_n$. V případě, že $L = +\infty$, pak od jistého n_0 je $\frac{a_n}{b_n} > 1$ čili $a_n > b_n$. Za předpokladu divergence $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dostaneme aplikací věty 2.2.1 naše tvrzení. □

Některá populární kritéria pro konvergenci řad s kladnými členy jsou v podstatě jen speciálními případy vět 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3, do kterých je dosazena jedna z následujících řad se známým chováním.

1. $\boxed{\text{Geometrická řada } \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \text{ konverguje právě tehdy, když } |q| < 1\,.}$

   Pro geometrickou řadu je n-tý částečný součet roven $s_n = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ a $s_n = n$ pro $q = 1$. Posloupnost (s_n) má tedy konečnou limitu, a to $\frac{q}{1-q}$, pouze pro $|q| < 1$.

2. $\boxed{\text{Nechť } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Řada } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje právě tehdy, když } \alpha > 1\,.}$

   Pro $\alpha \leq 1$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Protože harmonická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní, plyne z věty 2.2.1 divergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

   Uvažujme $\alpha > 1$. Označme $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$. U řady s kladnými členy

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right)$$

   snadno určíme n-tý částečný součet a posléze součet celé řady $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \mapsto 1$. Na úpravu n-tého členu této konvergentní řady použijeme Taylorův vzorec

   $$(1+x)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon x + x.\omega(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x \mapsto 0} \omega(x) = 0.$$

   Dostaneme

   $$a_n := \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{n^\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{n^\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{n}\omega(\tfrac{1}{n})\right) = \frac{\varepsilon - \omega(\frac{1}{n})}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

   Označíme-li $b_n = \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, máme $\lim \frac{a_n}{b_n} = \varepsilon > 0$. Z věty 2.2.3 plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

3. $\boxed{\text{Řada } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ diverguje.}}$

   Protože víme, že $\lim s_n$ existuje, můžeme součet řady určit tak, že spočítáme limitu vybrané posloupnosti (s_{2^n}),

   $$s_{2^n} = \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i \ln i} \Big) \geq \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k \ln 2^k} \Big) =$$

   $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{2 \ln 2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;\mapsto\; +\infty\,.$$

Poznámka. I když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje pro sebemenší pevné kladné ε, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ je divergentní. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,,$$

má podle věty 2.2.3 řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ stejný charakter jako harmonická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

A nyní slíbená kritéria. První dvě kritéria získáme porovnáním zkoumané řady s geometrickou řadou.

Cauchyovo odmocninové kritérium: *Nechť $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*

2) *Jakmile pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. 1) Z předpokladů plyne, že $a_n \leq q^n$ pro každé n od jistého indexu. Tvrzení pak plyne z věty 2.2.1 a z toho, že geometrická řada s kladným kvocientem menším než jedna konverguje.
2) Předpoklad implikuje, že pro nekonečně mnoho indexů je $a_n \geq 1$. Řada diverguje, protože není splněna ani nutná podmínka konvergence $a_n \mapsto 0$. $\square$

d'Alembertovo podílové kritérium: *Nechť $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*

2) *Jakmile pro všechny indexy n od jistého indexu n_0 platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. Obě tvrzení plynou z věty 2.2.2, kde za (b_n) bereme geometrickou posloupnost. V bodě 1) bereme kvocient $q \in (0, 1)$ a v bodě 2) bereme $q = 1$. $\square$

Další kritérium dostaneme, když jako srovnávací řadu použijeme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, která konverguje pro $\alpha > 1$.

Raabeovo kritérium: *Nechť $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Existuje-li $\alpha > 1$ a n_0 takové, že platí $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*

2) *Když existuje n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ platí $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. 1) Označme $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$ a uvažujme konvergentní řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Ověříme-li platnost nerovnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, bude tvrzení plynout z věty 2.2.2. Za tímto účelem si rozepíšeme $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ pomocí Taylorova vzorce jako $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} - \frac{1}{n} \cdot \omega\left(-\frac{1}{n}\right)$. Nerovnost $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$ lze ekvivalentně přepsat jako $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1+\varepsilon}{n}$. Stačí ukázat, že od jistého indexu je

$$1 - \frac{1+\varepsilon}{n} \overset{?}{\leq} 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} - \frac{1}{n} \cdot \omega\Big(-\frac{1}{n}\Big)$$

To přepíšeme po jednoduchých ekvivalentních úpravách (odečtení 1 a vynásobení nerovnosti číslem $-n$) na

$$1 + \varepsilon \overset{?}{\geq} 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \omega\Big(-\frac{1}{n}\Big)\,.$$

Protože levá strana nerovnosti má limitu ostře větší než pravá strana, podle věty o nerovnostech v limitách existuje n_0 tak, že nerovnost, nad kterou jsme udělali otazník, platí pro $n \geq n_0$.

2) Nerovnost $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ je ekvivalentní s nerovností $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Jelikož $1 - \frac{1}{n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, můžeme položit $b_n = \frac{1}{n-1}$ a divergence řady $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ plyne přímo z věty 2.2.2 a z toho, že řada $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ je divergentní. □

Poznámka. Pro Cauchyovo a d'Alembertovo kritérium je třeba ověřit existenci $q < 1$ takového, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, resp. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pro všechna n. To lze jednoduše provést nalezením limity posloupnosti $(\sqrt[n]{a_n})$, resp. $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$, v případě, že tato limita existuje.

Příklad 2.2.4. Máme rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+1}$. Použijeme Cauchyovo kritérium.

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n+1}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2.\ \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}}} \mapsto \frac{1}{2}\,.$$

Z definice limity plyne, že od jistého indexu n_0 je $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n+1}} < \frac{3}{4}$, tedy řada konverguje.

Poznámka. Rovněž v Raabeově kritériu lze existenci požadovaného $\alpha > 1$ nebo splnění předpokladu druhé části snadno demonstrovat pomocí výpočtu $\lim\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, pokud existuje a není rovna 1.

Příklad 2.2.5. Máme rozhodnout o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (2-\sqrt[2]{2})\cdot(2-\sqrt[3]{2})\cdot\ldots\cdot(2-\sqrt[n]{2})\,.$$

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2-\sqrt[n]{2} \leq 1$ pro každé n a limita podílu je 1. Není tedy možné použít d'Alembertovo kritérium. Zkoumejme výraz relevantní pro Raabeovo kritérium

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n(\sqrt[n]{2}-1) = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1}{\frac{1}{n}} \quad \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \quad \ln 2\,.$$

Protože $\ln 2 < 1$, zkoumaná řada podle Raabeova kritéria diverguje.

Jak jsme viděli na dvou příkladech, k ověření předpokladů kritérií se používá výpočet limity. Proto se s oblibou tato kritéria vyslovují v tzv. limitním tvaru, který je o něco slabší.

Cauchyovo odmocninové kritérium - limitní tvar: *Nechť $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
2) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

d'Alembertovo podílové kritérium - limitní tvar: *Nechť $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
2) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Raabeovo kritérium - limitní tvar: *Nechť $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
2) *Když $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Kapitolu zakončíme Gaussovým kritériem, které v podstatě jenom shrnuje předešlá kritéria.

Gaussovo kritérium: *Nechť (a_n) je kladná posloupnost, pro níž existují $q, \alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezená posloupnost (c_n) taková, že*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \textit{pro každé} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

1) *Když je $q < 1$ nebo když $q = 1$ a $\alpha > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
2) *Když je $q > 1$ nebo když $q = 1$ a $\alpha \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. Z tvaru (2.1) dostaneme, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Je-li $q \neq 1$, dává tvrzení věty d'Alembertovo podílové kritérium v limitním tvaru.

Je-li $q = 1$, dostaneme z (2.1), že $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$ a pro $\alpha \neq 1$ umíme o konvergenci rozhodnout podle Raabeova kritéria.

Jediný případ, který zbývá diskutovat, je $q = 1$ a $\alpha = 1$. Uvažujme proto řadu, jejíž členy (a_n) vyhovují pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztahu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} .$$

Tuto řadu srovnáme s řadou $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} b_n$, kde $b_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$. Tato divergentní řada je jednou z těch, které jsme uváděli mezi "kalibrovacími". Upravme nejdříve podíl jejích členů,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)\ln(n-1)}{n\ln n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1 - \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} .$$

Když ukážeme, že nerovnost $\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$ platí od jistého indexu, bude z věty 2.2.2 plynout divergence řady $\sum_{k=1}^{n} a_n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{b_{n+1}}{b_n} \iff \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n\ln n} \iff c_n \ge \underbrace{\frac{n^{\varepsilon}}{\ln n}}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{\to -1}$$

Protože výraz na pravé straně poslední nerovnosti má limitu $-\infty$ a protože je podle předpokladu posloupnost (c_n) omezená, nerovnost platí od jistého indexu n_0. □

Příklad 2.2.6. Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Připomeňme, že

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} .$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je a_n od indexu $n_0 = \alpha + 1$ rovno 0, a proto řada konverguje. Uvažujme proto $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Při takovém α jsou všechny členy řady kladné. V Gaussově kritériu místo podílu a_{n+1}/a_n budeme upravovat podíl a_n/a_{n-1}. Zjednoduší se technické úpravy, a přitom charakter řady s členy a_{n-1} a řady s členy a_n je stejný.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left|\frac{\alpha - n + 1}{n}\right| = \left|1 - \frac{\alpha+1}{n}\right| = 1 - \frac{\alpha+1}{n} \quad \text{pro každé } n > \alpha + 1 .$$

Řada je tedy konvergentní právě tehdy, když $\alpha + 1 > 1$.

Připojením případu $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dostáváme závěr, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \geq 0$.

Tvar Gaussova kritéria by mohl svádět k domněnce, že neexistují řady s kladnými členy, o jejichž konvergenci toto kritérium nerozhodne. Ale opak je pravdou. O některých řadách totiž lze dokázat, že podíl a_{n+1}/a_n nelze vyjádřit ve tvaru požadovaném v Gaussově kritériu. Mezi takové patří řada v následujícím příkladě.

Příklad 2.2.7. Zkoumejme v závislosti na reálném parametru β konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}\,.$$

Když $\beta \leq 1$, tak pro každé $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ je

$$\frac{1}{n \ln^\beta n} \geq \frac{1}{n \ln n}\,.$$

Protože řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ je divergentní, plyne z věty 2.2.1 i divergence řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$. Uvažujme proto $\beta > 1$. Označme $\varepsilon := \beta - 1 > 0$. U řady s kladnými členy

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln^\varepsilon n} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)} \right)$$

je snadné určit n-tý částečný součet $s_n = \frac{1}{\ln^\varepsilon 2} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)} \mapsto \frac{1}{\ln^\varepsilon 2}$. Jedná se tedy o konvergentní řadu. Ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln^\varepsilon n} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)}}{\frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}} = \varepsilon > 0\,.$$

Upravme pomocí Taylorova vzorce $(1+x)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon x + \omega(x) x$, kde $\lim_0 \omega(x) = 0$, nejdříve následující výraz

$$\frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)} = \frac{1}{\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^\varepsilon} = \frac{1}{\ln^\varepsilon n} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\ln^\varepsilon n} \left(1 - \frac{\varepsilon \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \omega_n \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right), \quad \text{kde } \omega_n \to 0\,.$$

Proto

$$\frac{\frac{1}{\ln^\varepsilon n} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)}}{\frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}} = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\varepsilon - \omega_n\right) \to \varepsilon\,.$$

Podle věty 2.2.3, je tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}$ konvergentní pro $\varepsilon > 0$. Dostali jsme tak další "kalibrovací" řadu.

Nechť $\beta \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$.

Nyní bychom mohli vytvořit nové, jemnější kritérium, které by ovšem opět nebylo univerzální.

2.3 Řady s obecnými členy

Při vyšetřování řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ začínáme se zkoumáním konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. V případě, že tato řada konverguje, jsme s úkolem hotovi. V opačném případě musíme použít jemnější kritéria.

Dirichletovo kritérium: *Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexní posloupnost splňující*

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je monotonní a* $\lim a_n = 0$*;*

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má omezenou posloupnost částečných součtů.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Konvergenci řady odvodíme z Bolzanova - Cauchyova kritéria. Pro odhad výrazu $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|$ použijeme Abelovy sumační formule. Označme pro pevné $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}, k \geq n$

$$B_k := b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_k.$$

Speciálně tedy $B_n = 0$. Pak

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = a_{n+p} B_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \big(a_k - a_{k+1}\big) B_k$$

Omezenost částečných součtů posloupnosti $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ znamená, že

$$(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\Big| \leq K\Big).$$

To pro $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ dává odhad $|B_k| \leq 2K$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti nyní můžeme odhadnout

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| \leq \Big|a_{n+p} B_{n+p}\Big| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \Big|\big(a_k - a_{k+1}\big) B_k\Big| \leq 2K|a_{n+p}| + 2K \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \Big|\big(a_k - a_{k+1}\big)\Big|$$

Jelikož (a_n) je monotonní posloupnost, jsou všechny rozdíly $a_k - a_{k+1}$ nekladné nebo nezáporné. Proto

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|(a_k - a_{k+1})\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})\right| = |a_{n+p} - a_{n+1}| \leq |a_{n+p}| + |a_{n+1}|$$

Pokračujeme proto v odhadu, přičemž využijeme monotonii (a_n).

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| \leq 2K\big(2|a_{n+p}| + |a_{n+1}|\big) \leq 6K\,|a_n|\,. \tag{2.2}$$

Podle předpokladu má posloupnost (a_n) nulovou limitu, což symbolicky lze zapsat

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n| < \tilde{\varepsilon})\,. \tag{2.3}$$

Dostaneme-li kladné ε, položíme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6K}$. K tomuto $\tilde{\varepsilon}$ podle (2.3) nalezneme n_0 tak, že pro každé $n > n_0, n \in \mathbb{N}$ a pro každé $p \in \mathbb{N}$ podle (2.2) platí $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < 2K(2\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}) = 6K\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. To podle Bolzanova - Cauchyova kritéria dává konvergenci řady. □

Příklad 2.3.1. Pomocí Dirichletova kritéria dokážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{n}$$

konverguje, když $\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Když je α celočíselným násobkem 2π, pak $\cos(\alpha n) = 1$ pro každé n a řada s členy $\frac{1}{n}$, tj. harmonická řada, je divergentní.

Nechť tedy $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Roli posloupnosti (a_n) v Dirichletově kritériu má posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$, která je klesající a má limitu 0; za posloupnost (b_n) bereme $(\cos(\alpha n))$. Protože

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \cos(\alpha k)\Big| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}\,,$$

má (b_n) omezenou posloupnost částečných součtů. To implikuje konvergenci zkoumané řady. Tato řada ovšem nekonverguje absolutně, protože

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(\alpha n)}{n}\right| \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(\alpha n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \cos(2\alpha n)}{2n}\,.$$

Řada napravo je pro $\alpha \neq k\pi$ součtem divergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ a konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha n)}{2n}$, tedy řada napravo je divergentní. Je-li $\alpha = k\pi$, je řada napravo harmonická, a tedy rovněž divergentní.

Odvodíme několik důsledků Dirichletova kritéria.

Abelovo kritérium: *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je reálná posloupnost a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexní posloupnost splňující*

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je monotonní a konvergentní;*

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *je konvergentní řada.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Označme $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje, protože je součtem dvou konvergentních řad:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

přičemž řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n$ konverguje podle Dirichleta a řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje podle předpokladu. □

Jednoduchým příkladem posloupnosti (b_n), která má omezené částečné součty, je posloupnost $b_n = (-1)^{n+1}$. Zřejmě platí $|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}| \leq 1$. Řady, kde n-tý člen má tvar $(-1)^{n+1}a_n$, přičemž posloupnost (a_n) nemění znaménka, se vyskytují často. Setkali jsme se s nimi např. při vyjádření funkcí $\sin x, \cos x$ a $\ln(1+x)$ pomocí Taylorova polynomu.

Definice 2.3.2. Nechť (a_n) je reálná posloupnost kladných čísel. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ nazýváme **řadou se střídavými znaménky**.

Vyslovíme dvě kritéria určená speciálně na řady se střídavými znaménky.

Leibnizovo kritérium: *Nechť* (a_n) *je klesající posloupnost kladných čísel. Když platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ *konverguje.*

Důkaz 1: Plyne přímo z Dirichletova kritéria, ve kterém položíme $b_n = (-1)^{n+1}$.

Důkaz 2: Jen pro zajímavost uvedeme i přímý jednoduchý důkaz. Protože

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \geq s_{2n} \qquad \text{a} \qquad s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0} \leq s_{2n-1},$$

je posloupnost (s_{2n}) rostoucí a (s_{2n-1}) klesající. Posloupnost sudých členů (s_{2n}) má tedy limitu $l_1 > -\infty$ a posloupnost lichých členů (s_{2n-1}) má limitu $l_2 < +\infty$. Jelikož navíc $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ a $\lim a_n = 0$, je limita posloupnosti (s_{2n}) rovna limitě posloupnosti (s_{2n-1}). Z pokrývací věty o limitách vybraných posloupností plyne, že existuje i $\lim s_n = l_1 = l_2 \neq \pm\infty$, tj. řada konverguje. □

Když o konvergenci řady lze rozhodnout pomocí Leibnizova kritéria, pak rozdíl součtu řady od n-tého částečného součtu můžeme snadno odhadnout.

Odhad chyby: Nechť (a_n) je posloupnost klesající k nule. Součet konvergnetní řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ označme s. Pak

$$\Big|s-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,a_k\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\,a_k\Big| = \underbrace{a_{n+1}-a_{n+2}}_{\geq 0}+\underbrace{a_{n+3}-a_{n+4}}_{\geq 0}+\underbrace{a_{n+5}-a_{n+6}}_{\geq 0}\cdots\ ,$$

a proto

$$\Big|s-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,a_k\Big| = a_{n+1}\underbrace{-a_{n+2}+a_{n+3}}_{\leq 0}\underbrace{-a_{n+4}+a_{n+5}}_{\leq 0}\cdots \leq a_{n+1}\,.$$

Součet s řady se střídavými znaménky se liší od sumy prvních n členů řady o míň, než je velikost dalšího členu řady.

Poznámka. Vraťme se k výpočtu hodnoty $\sin x$ pro $x \in (0,\frac{\pi}{4})$ s přesností 10^{-8}. Tuto úlohu jsme řešili v příkladě 1.2.2. Protože $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ je pro $x \in (0,\frac{\pi}{4})$ řada se střídavými znaménky, je z předchozího pravidla jasné, že $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ se liší v absolutní hodnotě od $\sin x$ o méně než $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$. To je odhad stejně dobrý, jako výsledek odvozený pracněji pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Modifikované Gaussovo kritérium: *Nechť (a_n) je kladná posloupnost splňující pro nějaké $q,\alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezenou posloupnost (c_n) vztah*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \textit{pro každé}\ \ n \in \mathbb{N}.$$

- *Je-li $q>1$ nebo je-li $q=1$ a $\alpha \leq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ diverguje.*
- *Je-li $q<1$ nebo je-li $q=1$ a $\alpha>1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ konverguje absolutně.*
- *Je-li $q=1$ a $\alpha \in (0,1\rangle$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ konverguje neabsolutně.*

Důkaz. **1)** Nechť $q>1$. Protože $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ implikuje $\lim a_n = +\infty$, není splněna ani nutná podmínka konvergence. Tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ diverguje.

2) Nechť $q<1$. Pak podle Gaussova kritéria pro kladné řady dostaneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ konverguje absolutně.

3) Nechť $q=1$. Rozlišíme čtyři případy.

3a) Nechť $\alpha>1$. Pak podle Gaussova kritéria pro kladné řady dostaneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ konverguje absolutně.

3b) Nechť $\alpha<0$. Protože $\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 0$, máme od jistého indexu nerovnost $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 0$, a tedy $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. To ale znamená, že kladná posloupnost (a_n) roste a že její limita nemůže být rovna 0. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ diverguje.

3c) Nechť $0 < \alpha \le 1$. Podle Gaussova kritéria pro řady s kladnými členy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. Neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ ukážeme ověřením podmínek Leibnizova kritéria.

Jelikož $\lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 0$, je od jistého n_0 splněna nerovnost $k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) > \frac{\alpha}{2}$, tj.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 - \frac{\alpha}{2k} < 1 \qquad \text{pro všechna } \; k \in \mathbb{N}, k > n_0\,. \tag{2.4}$$

To znamená, že kladná posloupnost (a_n) je klesající. Abychom ještě dokázali, že $\lim a_n = 0$, využijeme toho, že

$$\text{pro } \; x \in (0,1) \; \text{ je } \; \ln(1-x) < -x\;.$$

Zlogaritmováním (2.4) dostaneme

$$\ln a_{k+1} - \ln a_k \; < \; \ln\left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right) \; < \; -\frac{\alpha}{2k}\,.$$

Sečtením předchozích nerovností pro $k = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ máme

$$\ln a_n - \ln a_{n_0} \; < \; -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \quad \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \quad -\infty,$$

To implikuje $\ln a_n = -\infty$, a tedy $\lim a_n = 0$, jak jsme pro splnění podmínek Leibnizova kritéria potřebovali.

3d) Nechť $\alpha = 0$. Členy kladné posloupnosti (a_n) splňují

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \text{pro každé } \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Využijeme toho, že

$$\text{pro } \; x \in \left(-\tfrac{1}{2}, +\infty\right) \; \text{ je } \; \ln(1+x) \ge x - x^2\;.$$

Protože $\lim \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} = 0$, od jistého indexu n_1 je $\left|\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right| < \frac{1}{2}$. Zlogaritmováním (2.5) a využitím odhadu dostaneme

$$\ln a_{k+1} - \ln a_k = \ln\left(1 + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\right) > \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}} - \left(\frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\right)^2 \quad \text{pro každé } \; k \in \mathbb{N}, k > n_1.$$

Sečtením předchozích nerovností pro $k = n_1, n_1+1, \ldots, n-1$ máme

$$\ln a_n - \ln a_{n_1} > \sum_{k=n_1}^{n-1} \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}} - \left(\frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\right)^2.$$

Uvědomme si, že řada napravo je konvergentní. Plyne to ze srovnávacího kritéria pro kladné řady. Jelikož (c_k) je omezená posloupnost, existuje H tak, že $|c_k| \leq H$. Proto je $\frac{|c_k|}{k^{1+\varepsilon}} \leq \frac{H}{k^{1+\varepsilon}}$ a podobně $\frac{c_k^2}{k^{2+2\varepsilon}} \leq \frac{H^2}{k^{2+2\varepsilon}}$. Přitom řady $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$ jsou konvergentní. Proto řada na pravé straně nerovnosti má konečný součet. To znamená, že posloupnost $(\ln a_n)$ je omezená zdola, a tudíž $\lim \ln a_n \neq -\infty$. To implikuje, že $\lim a_n \neq 0$, a není tak splněna ani nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$. $\square$

Všechna kritéria, která jsme pro konvergenci řad s obecnými členy vyslovili, vyžadovala monotonii posloupnosti (a_n). U Gaussova kritéria to není patrné na první pohled. Ale v důkazu jsme viděli, že požadavek, aby podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ měl daný tvar, buď vynucuje monotonii (a_n) nebo implikuje $\lim a_n \neq 0$. Je tedy jasné, že např. pro vyšetřování řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

nelze použít žádné z dosud odvozených kritérií. Proto zavedeme na množině řad operaci závorkování, jejíž výsledek je někdy řada, chování které lze již vyšetřit pomocí uvedených kritérií.

Definice 2.3.3. (uzávorkování řady) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost a nechť $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel s nultým členem $k_0 = 0$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, jejíž členy definujeme předpisem

$$A_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \ldots + a_{k_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

nazýváme **uzávorkováním** řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$.

Když označíme s_n částečné součty řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a S_n částečné součty jejího uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, pak $S_n = s_{k_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost částečných součtů (S_n) je vybrána z posloupnosti (s_n).

Věta 2.3.4. *Pokud řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i každé její uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$.*

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ osciluje, zatímco její uzávorkování podle posloupnosti $(k_n) = (2n)$ je konvergentní řadou s členy $A_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z hlediska použití je věta 2.3.4 málo zajímavá. Závorkujeme přece v naději, že z chování uzávorkované řady budeme moci něco říct o neznámém chování řady původní. To nám umožní další věta.

Věta 2.3.5. *Nechť* $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ *je uzávorkování řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *podle posloupnosti* (k_n)*. Nechť jsou splněny podmínky*

i) existuje $M \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $k_{n+1} - k_n \leq M$ *a*

ii) $\lim a_n = 0$.

Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.*

Důkaz. Opět označíme S_n n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a s_n n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Uvažujme těchto M posloupností:

$$(S_n),\ (S_n + a_{k_n+1}),\ (S_n + a_{k_n+1} + a_{k_n+2}), \ldots, (S_n + a_{k_n+1} + a_{k_n+2} + \ldots + a_{k_n+M-1})\,.$$

Existuje-li $\lim S_n$, pak všechny tyto posloupnosti mají díky podmínce ii) tutéž limitu. Přitom všechny uvedené posloupnosti jsou vybrané z posloupnosti (s_n), konkrétně jsou to posloupnosti

$$(s_{k_n}),\ (s_{k_n+1}), (s_{k_n+2}), \ldots, (s_{k_n+M-1})\,.$$

Jelikož indexy vybraných posloupností vzhledem k podmínce i) pokrývají celé $\mathbb{N}$, plyne z pokrývací věty pro limity, že existuje také $\lim s_n$ a je rovna $\lim S_n$. □

Příklad 2.3.6. Uzávorkujme řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

podle posloupnosti $(k_n) = (2n)$. Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1} - 1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} - 2}{(\sqrt{2n} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \beta_n)\,,$$

kde

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{(\sqrt{2n} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1)} = \frac{1}{(\sqrt{2n} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1)(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n})}$$

a

$$\beta_n = \frac{2}{(\sqrt{2n} + 1)(\sqrt{2n+1} - 1)}\,.$$

Přitom

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Tedy řada $\sum \alpha_n$ konverguje a řada $\sum \beta_n$ diverguje. Proto uzávorkovaná řada $\sum(\alpha_n - \beta_n)$ diverguje. Jelikož $\lim a_n = 0$, diverguje i původní řada. Přitom podle Leibnizova kritéria řada

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konverguje. Vidíme, jak je předpoklad monotonie v Leibnizově kritériu důležitý.

2.4 Přerovnání řady a násobení řad

Operace sčítání v $\mathbb{C}$ je komutativní. Proto při sčítání konečného počtu čísel nezáleží na pořadí, v jakém sčítáme. Teď se budeme věnovat otázce, co udělá záměna pořadí při nekonečně mnoha sčítancích.

Definice 2.4.1. Mějme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekci $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ nazýváme **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle ϕ.

Příklad 2.4.2. Uvažujme konvergentní řadu

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Součet řady jsme uměli určit již v zimním semestru s využitím rovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + \varepsilon_n, \quad \text{kde } \gamma \text{ je Eulerova konstanta a } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Pro $2n$-tý částečný součet s_{2n} totiž platí

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \Big) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln 2n - \ln n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \quad \to \quad \ln 2\,.$$

Jelikož $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, je i $\lim s_{2n+1} = \ln 2$.

Členy řady teď uspořádáme tak, aby vždycky po dvou kladných členech následoval jeden záporný člen, tj. uvažujeme řadu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Formálně lze bijekci ϕ popsat předpisem

$$\phi(n) = \begin{cases} 2k, & \text{pro } n = 3k, \\ 4k-1, & \text{pro } n = 3k-1, \\ 4k-3, & \text{pro } n = 3k-2. \end{cases}$$

Budeme uvažovat součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, která vznikne z řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ uzávorkováním po třech. Protože limita n-tého členu řady je 0, mají obě řady stejný charakter a v případě konvergence i součet. Pro n-tý částečný součet S_n řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ platí

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} =$$

$$= \ln 4n + \gamma + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\Big(\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}\Big) - \tfrac{1}{2}\Big(\ln n + \gamma + \varepsilon_n\Big) \quad \to \quad \tfrac{3}{2}\ \ln 2\,.$$

Přerovnaná řada je tedy opět konvergentní, má ale jiný součet.

Poznamenejme, že řada, kterou jsme v předchozím příkladě přerovnali, byla neabsolutně konvergentní. Jak ukáže další věta, to je i důvodem, proč bylo možné přerovnáním změnit její součet. Předtím se ještě pro obecnou reálnou řadu podívejme zvlášť na chování kladných a na chování záporných členů.

Poznámka. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je reálná řada. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n^+ := \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{a} \quad a_n^- := \frac{|a_n| - a_n}{2}\,.$$

Snadno nahlédneme, že

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n\,, & \text{když } a_n > 0 \\ 0\,, & \text{když } a_n \le 0 \end{cases} \qquad \text{a} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0\,, & \text{když } a_n > 0 \\ -a_n\,, & \text{když } a_n \le 0 \end{cases}.$$

Rovněž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Z definičního vztahu pro a_n^+ a a_n^- dostaneme:

- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ konvergují a platí $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$.
- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ podstatně divergují, tj. mají obě součet $+\infty$.

Věta 2.4.3. *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak každé její přerovnání je absolutně konvergentní řada se stejným součtem.*

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $h_n := \max\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\}$. Protože ϕ je prosté, dostaneme $h_n \ge n$. Platí

$$\sum_{k=1}^{n} \big|a_{\phi(k)}\big| \ \le\ \sum_{k=1}^{h_n} |a_k| \ \le\ \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \in \mathbb{R}\,. \tag{2.6}$$

Posloupnost částečných součtů absolutních hodnot přerovnané řady je omezená, a tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ je absolutně konvergentní.

Důkaz toho, že přerovnáním nezměníme součet řady, rozdělíme na tři případy:

a) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq 0$. Pak odhad (2.6) říká, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Protože řada $\sum a_n$ vznikne přerovnáním z absolutně konvergentní řady $\sum a_{\phi(n)}$ pomocí bijekce ϕ^{-1}, platí také

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi^{-1}(\phi(n))} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}.$$

To už dává rovnost součtů $\sum a_{\phi(n)} = \sum a_n$.

b) Pro reálnou absolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ využijeme pozorování, že $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy. Pro ty jsme už v bodě a) ukázali, že přerovnání nemění jejich součet. Proto můžeme psát

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_{\phi(n)}^+ - \sum a_{\phi(n)}^- = \sum a_{\phi(n)}.$$

c) Konverguje-li absolutně komplexní řada $\sum a_n$, pak ze vztahu $|a_n| \geq |\mathrm{Re}\ a_n|$ a $|a_n| \geq |\mathrm{Im}\ a_n|$ plyne, že konvergují absolutně i řady $\sum \mathrm{Re}\ a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\ a_n$. U těchto řad už podle bodu b) přerovnání nezmění součet. Proto platí

$$\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\ a_n + i \sum \mathrm{Im}\ a_n = \sum \mathrm{Re}\ a_{\phi(n)} + i \sum \mathrm{Im}\ a_{\phi(n)} = \sum a_{\phi(n)}$$

pro každé přerovnání. □

Věta 2.4.4. (Riemannova) *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní reálná řada. Pak ke každému $s \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje přerovnání $\sum a_{\phi(n)}$, jež má součet s. Rovněž existuje oscilující přerovnání $\sum a_{\psi(n)}$.*

Důkaz. Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, je $\lim a_n = 0$. Navíc se jedná o neabsolutní konvergenci, a proto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$. Vynecháním konečně mnoha členů řady nezměníme její charakter, a tedy

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n^- = +\infty \quad \text{pro každé} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Uvažujme $s \in \mathbb{R}$. Vlastnost (2.7) nám umožní přeuspořádávat členy posloupnosti (a_n) takto:

Bereme postupně kladné členy tak dlouho, až jejich součet převýší hodnotu s. Jakmile přesáhneme s začneme k získanému součtu přidávat nekladné členy posloupnosti pokud nedocílíme součtu menšího než s. Jakmile součet klesne pod hodnotu s, začínáme přidávat k již vytvořenému součtu dosud nepoužité kladné členy posloupnosti až do doby, než prvně přesáhneme hodnotu s. Pak opět rozšiřujeme součet o další nekladné členy, abychom klesli pod hodnotu s, atd.

Z konstrukce je patrné, že každý člen posloupnosti (a_n) je vybrán právě jednou, a tedy se jedná o přerovnání řady. V každém kroku se částečný součet liší od s nanejvýš o absolutní hodnotu posledního členu, za kterým jsme začali vybírat členy s opačným znaménkem. Protože $\lim a_n = 0$, částečné součty konvergují k s.

Uvažujeme-li $s = +\infty$, proces vybírání členů posloupnosti (a_n) modifikujeme takto: Bereme postupně kladné členy posloupnosti, dokud jejich součet nepřekročí hodnotu 1, pak k součtu přidáme první nekladný člen. Opět přidáváme kladné členy posloupnosti, až součet přesáhne hodnotu 2, pak k součtu přidáme v pořadí druhý nekladný člen. A znovu přidáváme kladné členy posloupnosti, pokud nedosáhneme součtu většího než 3, atd. Je zřejmé, že limita částečných součtů je $+\infty$. Pro $s = -\infty$ je postup obdobný.

Chceme-li docílit oscilující řady, vybíráme střídavě z kladných a nekladných členů tak dlouho, až částečný součet přesáhne hodnotu 1, resp. klesne pod hodnotu -1. $\square$

V tělese platí kromě komutativních zákonů i distributivní zákony, a tedy součin dvou konečných součtů

$$(a_1 + a_n + \ldots + a_N)(b_1 + b_2 + \ldots + b_N)$$

lze získat jako součet čísel $a_i b_j$, kde probereme v libovolném pořadí všechny kombinace indexů i a j. Po zkušenosti s přerovnáváním řady už musíme být při násobení nekonečných součtů opatrní.

Definice 2.4.5. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady a $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nechť je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $c_n = a_i b_j$, kde $n = \phi(i, j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ nazýváme **součinem řad** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Poznámka. Pro součin řad se používá značení

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j \ ,$$

které ale nepostihuje zvolenou bijekci ϕ, tedy nepostihuje pořadí sčítání v řadě. To ale nevadí v případě, že součin dvou řad je absolutně konvergentní řadou. V té, jak víme, na pořadí členů nezáleží.

Věta 2.4.6. *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní řady. Pak jejich li-*

bovolný součin je taky absolutně konvergentní řada a pro její součet platí

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\Big).$$

Důkaz. Mějme bijekci $\phi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Číslo i_n nechť označuje první složku dvojice $\phi^{-1}(n)$ a číslo j_n druhou složku dvojice $\phi^{-1}(n)$, tj. $\phi(i_n, j_n) = n$.

Položme $k_n := \max\{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{k_n} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{k_n} |b_k|\Big) \le \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|\Big).$$

To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|$ má omezené částečné součty. Proto je $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ absolutně konvergentní. Součet absolutně konvergentní řady lze získat z libovolného přerovnání a libovolného uzávorkování řady. Označme

$$M_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, i \le k, j \le k, (k-i)(k-j) = 0\}.$$

Zřejmě

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathbb{N}^2 \quad \text{a} \quad M_k \cap M_\ell = \emptyset\,, \quad \text{když} \quad k \ne \ell.$$

Součet řady lze tedy získat takto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in M_k} a_i b_j \;=\; \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big).$$

□

Definice 2.4.7. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady. Řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\Big)$$

nazýváme **součinovou řadou** řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Poznámka. Součinová řada je uzávorkováním jednoho konkrétního součinu dvou řad. Proto můžeme rovnou vyslovit důsledek předchozí věty.

Důsledek 2.4.8. *Pro absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ platí*

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\Big).$$

Začíná-li indexování členů řad od jiného indexu než jedna, např. od nuly, musíme příslušně upravit i indexování součinové řady. Protože

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}\,,$$

platí pro absolutně konvergentní řady

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1}b_{n-k-1}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k-2}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)\,.$$

Komplexní mocnina: Uvažujme dvě absolutně konvergentní řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^n}{n!}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Určeme n-tý člen jejich součinové řady

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k} = \frac{1}{n!}(\alpha+\beta)^n\,.$$

Z důsledku tedy plyne

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}\,.$$

To nás ale nepřekvapuje. Z kapitoly o Taylorově rozvoji už víme, že $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ pro každé reálné x, a tedy jsme dokázali tvrzení

$$e^\alpha . e^\beta = e^{\alpha+\beta}, \tag{2.8}$$

které je pro reálné exponenty zřejmé z definice obecné mocniny. Fakt, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ je konvergentní pro každé komplexní z, nám umožňuje definovat komplexní mocninu předpisem

$$\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} \quad \text{pro} \quad z \in \mathbb{C}}$$

Ukázali jsme tedy platnost vztahu (2.8) pro každé komplexní α a β. Konečně můžeme psát

$$e^{i\phi}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\phi)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{2n}\phi^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^{2n+1}\phi^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\phi^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\phi^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos\phi+i\sin\phi$$

a odvodit tak vztah

$$\boxed{e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi \quad \text{pro každé} \quad \phi\in\mathbb{R}}$$

užitečný ve fyzice, v elektrotechnice a pod.

Kapitola 3

Mocninné řady

3.1 Definice a vlastnosti mocninných řad

Definice 3.1.1. Nechť $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ je reálná resp. komplexní posloupnost a nechť a je reálné resp. komplexní číslo. Pak řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ nazýváme **mocninnou řadou** se středem v bodě a. Množinu všech reálných resp. komplexních čísel x, pro která mocninná řada konverguje, nazýváme **obor konvergence** mocninné řady, $s(x)$ pak označuje součet mocninné řady pro x z oboru konvergence.

Posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ a bodu a přiřazujeme funkci $s(x)$. Je-li $s_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ a $s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, pak $s_a(x) = s_0(x-a)$. Stačí tedy studovat vlastnosti mocninných řad se středem v bodě 0. Uveďme si několik příkladů reálných mocninných řad.

- $(1)_{n=0}^{+\infty} \quad \mapsto \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = s(x)$, obor konvergence je $(-1,1)$.
- $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{+\infty} \quad \mapsto \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = e^x = s(x)$, obor konvergence je $\mathbb{R}$.
- $(n!)_{n=0}^{+\infty} \quad \mapsto \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$ konverguje pouze pro $x=0$.

Věta 3.1.2. *Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}, \rho \geq 0$ takové, že*

i) pokud $|x-a| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje absolutně;

ii) pokud $|x-a| > \rho$, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ diverguje.

Důkaz. Stačí ověřit platnost dvou tvrzení:

1. když je posloupnost $\big(a_n(x_0-a)^n\big)$ omezená, pak pro každé x takové, že $|x-a| < |x_0-a|$, řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje absolutně,

2. když je posloupnost $\big(a_n(x_0-a)^n\big)$ neomezená, pak pro každé x takové, že $|x-a| \geq |x_0-a|$, řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ diverguje,

a pak položit

$$\rho = \sup\Big\{|x_0 - a| \ : \ \text{posloupnost } \big(a_n(x_0 - a)^n\big) \quad \text{je omezená}\Big\}.$$

Předpokládejme, že v nějakém bodě x_0 je posloupnost $\big(a_n(x_0 - a)^n\big)$ omezená. Tedy existuje $K > 0$ takové, že $|a_n(x_0 - a)^n| \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $|x - a| < |x_0 - a|$ dostaneme

$$|a_n(x - a)^n| = |a_n||x - a|^n = |a_n||x_0 - a|^n \Big(\frac{|x - a|}{|x_0 - a|}\Big)^n \le K\Big(\frac{|x - a|}{|x_0 - a|}\Big)^n.$$

Posloupnost na pravé straně je geometrická s kladným kvocientem < 1, proto podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x - a)^n|$ konverguje.

Druhé tvrzení je zřejmé, protože neomezenost $\big(a_n(x_0 - a)^n\big)$ implikuje neomezenost $\big(a_n(x - a)^n\big)$ pro $|x - a| \ge |x_0 - a|$ a není tedy splněna ani nutná podmínka konvergence řady. □

Definice 3.1.3. Číslo ρ z předchozí věty nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady.

Věta 3.1.4. *Poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$ *je roven*

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}\,,$$

přičemž klademe $\rho = 0$*, když limes superior je* $+\infty$*, a* $\rho = +\infty$*, když limes superior je* 0.

Důkaz. Z důkazu předchozí věty víme, že $\rho = \sup M$, kde

$$M = \{|y| \ : \ (a_n y^n) \quad \text{je omezená}\}.$$

Popíšeme prvky množiny M. Zřejmě $0 \in M$. Uvažujme proto $y \neq 0$. Pro nenulové y platí

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} = |y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

• Když $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro nekonečně mnoho indexů n je $|a_n y^n| > (1 + \varepsilon)^n$, a tedy posloupnost $(a_n y^n)$ není omezená. Máme tedy implikaci

$$|y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |y| \notin M\,.$$

• Když $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} < 1$, pak od jistého indexu počínaje je $|a_n y^n| < 1$, a tedy posloupnost $(a_n y^n)$ je omezená. Platí tedy

$$|y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |y| \in M\,.$$

Z těchto dvou implikací už snadno odvodíme:

jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, pak $M = \{0\}$ a $\rho = \sup M = 0$,

jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, pak $M = \langle 0, +\infty)$ a $\rho = \sup M = +\infty$,

jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L \in (0 + \infty)$, pak $M = \langle 0, 1/L)$ nebo $M = \langle 0, 1/L\rangle$. V obou případech je $\rho = 1/L$. □

Poznámka. Z Cauchyho vzorce (viz Matematická analýza I) plyne, že když existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak je tato limita rovna ρ.

Příklad 3.1.5. Zkoumejme obor konvergence komplexní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Poloměr konvergence je

$$\rho = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1 \cdot$$

Pro x z vnitřku kruhu se středem 0 a poloměrem 1 řada konverguje absolutně, vně kruhu řada diverguje. Zbývá proto určit, co se děje na kružnici. Každé x z jednotkové kružnice má tvar $x = \cos\phi + i \sin\phi$, $\phi \in \langle 0, 2\pi)$. Proto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\phi)}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\phi)}{n} \,.$$

Z Dirichletova kritéria víme, že pro $\phi \neq 0$ obě řady konvergují. V bodě $x = 1$, tj. pro $\phi = 0$ řada diverguje.

Obor konvergence zkoumané mocninné řady je kruh se středem v bodě 0 a jednotkovým poloměrem včetně hraniční kružnice vyjma bodu 1.

Poznámka. Protože $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, dostaneme ihned tvrzení, že mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (x-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} (x-a)^n$$

mají stejný poloměr konvergence. Obory konvergence mohou však být různé. Dokladem toho jsou např. řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Věta 3.1.6. *Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je reálná mocninná řada s kladným poloměrem konvergence ρ. Označme její součet $s(x)$. Pak pro každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$ platí*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \,.$$

Důkaz. Zvolme pevně bod $x_0 \in (a-\rho, a+\rho)$ a kladné $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 < \rho$ tak, aby platilo $x_0 \in (a-\rho_1, a+\rho_1)$. Podle předchozí poznámky řada $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n^2 \rho_1^{n-2}$ konverguje. Označme její součet K. Pak pro libovolné $x \in (a-\rho_1, a+\rho_1)$ platí

$$s(x) - s(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \big((x-a)^n - (x_0-a)^n\big) = (x-x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} .$$

Proto

$$\left| \frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x_0-a)^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Big((x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} - (x_0-a)^{n-1} \Big) \right|$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} (x_0-a)^{n-1-k} \underbrace{\Big((x-a)^k - (x_0-a)^k \Big)}_{(x-x_0)\sum_{i=0}^{k-1}(x-a)^i (x_0-a)^{k-1-i}} \right| < |x-x_0| \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n^2 \rho_1^{n-2} \le K |x-x_0| .$$

Z věty o limitě sevřené funkce dostaneme po limitním přechodu $x \to x_0$, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0-a)^{n-1} .$$

□

Vlastnost, kterou jsme teď dokázali, lze shrnout heslem

"Mocninnou řadu lze uvnitř oboru konvergence derivovat člen po členu"

a formálně zapsat

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(a_n (x-a)^n \Big)' .$$

Protože derivováním se nemění poloměr konvergence, lze mocninnou řadu s kladným poloměrem konvergence derivovat nekonečněkrát, přičemž

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n (x-a)^{n-k} .$$

Speciálně

$$s^{(k)}(a) = k! a_k .$$

Věta 3.1.7. *Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence. Označme $s(x)$ její součet. Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!}$.*

Poznámky. Uveďme dva důsledky předchozí věty.

1. Dvě různé mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-a)^n$ s kladným poloměrem konvergence nemohou mít stejný součet.

2. Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ je n-tým Taylorovým polynomem funkce $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ za předpokladu, že tato mocninná řada má poloměr konvergence $\rho > 0$.

3.2 Rozvoj funkce do mocninné řady

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n \quad \text{pro každé} \ \ x \in \mathcal{J}$$

nazýváme **rozvojem funkce do mocninné řady** se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J}$ je takový, že $a \in \mathcal{J}^o$ a $\mathcal{J} \subset D_f$. Jako $\mathcal{J}$ uvažujeme zpravidla největší interval s touto vlastností.

Z předchozí věty víme, že nutnou podmínkou pro nalezení rozvoje funkce do mocninné řady se středem v bodě a je existence $f^{(n)}(a)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že jediným kandidátem pro rozvoj funkce je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \, .$$

Tuto řadu nazýváme **Taylorovou řadou** funkce f. Z Taylorova vzorce

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

definujícího zbytek $R_n(x)$ plyne, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \, .$$

Ověřování podmínky $\lim R_n(x) = 0$ nebylo vždy jednoduché. Pomáhal nám k tomu Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku. Možnost derivování mocninné řady nám umožní získat snadněji vyjádření funkce f pomocí mocninné řady.

Příklad 3.2.1. Nalezněme rozvoj funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ do mocninné řady se středem v bodě 0. Protože

$$f'(x) = \big(\operatorname{arctg} x\big)' = \frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{pro každé } x \in (-1,1),$$

dostaneme

$$\big(\operatorname{arctg} x\big)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)' \quad \text{pro každé } x \in (-1,1).$$

Když dvě funkce mají stejnou derivaci na intervalu, pak se tyto funkce liší nanejvýš o konstantu. Existuje proto konstanta c taková, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c \quad \text{pro každé } x \in (-1,1).$$

Když dosadíme do pravé a levé strany rovnosti $x = 0$, dostaneme $c = 0$.

Otázkou zůstává, jak vypadá maximální množina těch x, pro které platí rovnost mezi mocninnou řadou a funkcí $\operatorname{arctg} x$. Protože poloměr konvergence mocninné řady se derivováním nemění, je zřejmé, že pro x v absolutní hodnotě větší než 1 nemůže rovnost platit. Zbývá tedy diskutovat body $x = 1$ a $x = -1$, ve kterých řada konverguje. Odpověď nám poskytne následující věta.

Věta 3.2.2. (Abelova) *Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.*

Důkaz. Uvažujme reálnou mocninnou řadu $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$. Je-li $\rho = 0$, není co dokazovat. Proto uvažujme $\rho > 0$. Pro x takové, že $|x-a| < \rho$, existuje konečná derivace $s'(x)$, a tedy je funkce s spojitá v x. Zbývá tedy diskutovat případ $\rho \in (0,+\infty)$ a ukázat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \quad \text{konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \rho_-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n$$

a podobně

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\rho)^n \quad \text{konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\rho_+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\rho)^n .$$

Dokážeme pouze první z těchto implikací, druhá se dokazuje obdobně. Zvolme libovolné kladné ε. Jelikož platí

$$\mathbb{R} \ni \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big(\Big| \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} a_n \rho^n \Big| < \varepsilon \Big)$$

nalezneme k ε příslušné n_0. Budeme odhadovat výraz

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \Big| = \Big| \sum_{n=0}^{n_0} \Big(a_n x^n - a_n \rho^n \Big) + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n \rho^n \Big(\Big(\frac{x}{\rho}\Big)^n - 1 \Big)}_{H} \Big|.$$

Protože polynom $\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n$ je funkce spojitá v každém bodě, a tedy i v bodě ρ, platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\Big(|x-\rho| < \delta \;\Rightarrow\; \Big|\sum_{n=0}^{n_0} a_n(x^n - \rho^n)\Big| < \varepsilon\Big).$$

Abychom odhadli hodnotu H, uvažujeme libovolné $p \in \mathbb{N}$ a použijeme Abelovu sumaci

$$\sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} b_n c_n = B_{n_0+p} c_{n_0+p} + \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p-1} B_n(c_n - c_{n+1}),$$

kde

$$B_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k,\ \ b_n = a_n \rho^n,\ \text{ a } c_n = \Big(\frac{x}{\rho}\Big)^n - 1.$$

O výrazu B_n pro $n > n_0$ víme, že $|B_n| = \Big|\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \rho^k\Big| < \varepsilon$. Protože nás zajímá limita $x \to \rho_-$, uvažujeme $x < \rho$. Pro taková x je posloupnost (c_n) klesající a $|c_n| < 1$. Dostaneme

$$\Big|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} a_n \rho^n \Big(\Big(\frac{x}{\rho}\Big)^n - 1\Big)\Big| \;\le\; |B_{n_0+p}|.|c_{n_0+p}| + \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p-1} |B_n|(c_n - c_{n+1}) \;<$$

$$\le\; \varepsilon + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p-1} (c_n - c_{n+1}) \;=\; \varepsilon + \varepsilon(c_{n_0+1} - c_{n_0+p}) \;<\; 3\varepsilon\,.$$

Poslední odhad platí pro každé $p \in \mathbb{N}$, proto i $|H| \le 3\varepsilon$. Celkově máme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, \rho - \delta < x < \rho)\Big(\ \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n\Big| < 4\varepsilon\Big).$$

To už znamená

$$\lim_{x \to \rho_-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n,$$

jak jsme chtěli dokázat. □

Pokračování příkladu 3.2.1 Nyní můžeme dokončit rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ do mocninné řady. Už víme, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Jelikož řada napravo konverguje pro $x = \pm 1$ a funkce $\operatorname{arctg} x$ je spojitá v bodech 1 a -1, dostaneme z Abelovy věty

$$\operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{a} \quad \operatorname{arctg}(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

Tedy na závěr

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{3.1}$$

Příklad 3.2.3. Stejným způsobem odvodíme rozklad funkce $\ln(1+x)$ do mocninné řady. Využijeme toho, že

$$\Big(\ln(1+x)\Big)' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1).$$

Proto platí

$$\ln(1+x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro } x \in (-1, 1)\,.$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme $c = 0$. Jelikož řada konverguje i pro $x = 1$ a funkce $\ln(1+x)$ je spojitá v bodě $x = 1$, lze platnost rozvoje rozšířit na interval $\mathcal{J} = (-1, 1\rangle$.

V kapitole Taylorův vzorec jsme odvodili, že

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

K tomu jsme použili Cauchyův tvar zbytku a technicky náročné odhady. Teď ukážeme, jak lze stejný výsledek elegantně získat pomocí **metody neurčitých koeficientů**.

Příklad 3.2.4. Chceme rozvinout funkci $f(x) = (1+x)^\alpha$ do mocninné řady. Protože $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, platí

$$(1+x) f'(x) = \alpha f(x) \quad \text{a} \quad f(0) = 1\,.$$

Hledejme proto mocninnou řadu $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence ρ takovou, aby platilo

$$s(0) = 1 \;\text{ a }\; (1+x)s'(x) = \alpha s(x) \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1 \;\text{ a }\; (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

To implikuje

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1) a_{n+1} + n a_n \Big) x^n = \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\, a_n x^n\,.$$

Jelikož dvě mocninné řady mají stejný součet pouze v případě, že všechny jejich koeficienty jsou stejné, dostaneme

$$a_1 = \alpha a_0 = \alpha \quad \text{a} \quad (n+1)a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \text{ tj. } a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\, a_n\,.$$

Tedy

$$a_n = \frac{\alpha - n + 1}{n} \cdot \frac{\alpha - n + 2}{n-1} \cdot \frac{\alpha - n + 3}{n-2} \cdots \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1} =: \binom{\alpha}{n} \quad \text{pro každé } \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řada $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ má poloměr konvergence 1, protože $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. Zbývá vysvětlit, proč se $s(x) = (1+x)^\alpha$. Derivujme pro $x \in (-1, 1)$

$$\Big(\frac{s(x)}{(1+x)^\alpha}\Big)' = \frac{s'(x)(1+x)^\alpha - s(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}\,.$$

Mocninnou řadu jsme konstruovali tak, aby čitatel zlomku byl identicky roven nule. Tedy

$$\frac{s(x)}{(1+x)^\alpha} = \text{konstanta} \quad \text{pro } x \in (-1, 1)\,.$$

Jelikož jsme a_0 volili tak, aby navíc $s(0) = 1 = 1^\alpha$, je konstanta rovna 1. Proto

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \quad \text{pro } x \in (-1, 1) \ \text{ a libovolné } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Zbývá tedy určit maximální množinu těch x, pro která předchozí vztah platí. Množina těchto x bude záviset na α. Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je funkce $(1+x)^\alpha$ polynomem. I řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ má pouze konečný počet nenulových členů. Rovnají-li se dva polynomy v nekonečně mnoha hodnotách, rovnají se pak pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto

$$\text{I. } \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

Pro $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ a o konvergenci řad $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ lze rozhodnout pomocí Gaussova resp. modifikovaného Gaussova kritéria. Protože

$$\Bigg|\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n-1}}\Bigg| = 1 - \frac{1+\alpha}{n}\,,$$

dostaneme

$$\text{II. } \alpha > 1, \alpha \notin \mathbb{N}: \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle\,,$$

$$\text{III. } \alpha \in (0,1): \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro } x \in (-1,1\rangle\,,$$

$$\text{IV. } \alpha < 0: \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{pro } x \in (-1,1)\,.$$

3.3 Aplikace mocninných řad

1) Sčítání nekonečných sum

Určeme nekonečný součet

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)}\,.$$

Odmocninovým kritériem snadno zjistíme, že se jedná o konvergentní řadu. Definujme

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Protože

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)',$$

dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)\,.$$

Součet s vyjádříme snadno pomocí hodnoty funkce

$$s = \sqrt{3}\, f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \sqrt{3}\, \ln \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,.$$

2) Sčítání konečných sum

Abychom sečetli

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

uvažujeme součin dvou mocninných řad a zobecněný binomický vzorec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\beta}{n} x^n = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n\,.$$

Pomocí součinové řady dostaneme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\beta}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \cdot$$

Tedy platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \cdot$$

Zvolíme-li $n = \alpha = \beta$, dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}\,.$$

3) Řešení rekurentních vztahů

Chceme najít neznámou posloupnost $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vyhovující rekurentnímu vztahu[1]

$$d_1 = 1 \quad \text{a} \quad d_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k} \quad \text{pro } n \geq 2\,.$$

Definujme funkci

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n\,.$$

Vynásobením rekurentního vztahu hodnotou x^n a sumací přes $n = 2, 3, 4, \ldots$ dostaneme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}\,.$$

Pravá strana představuje součinovou řadu. Proto můžeme psát

$$f(x) - x = f(x).f(x)$$

Řešením této kvadratické rovnice pro neznámou $f(x)$ je

$$f_{1,2}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}\,.$$

[1] Tento rekurentní vztah vznikne z úlohy určit počet všech možných uzávorkování součinu n čísel $a_1.a_2 \ldots a_n$. Počet uzávorkování je označem d_n. Např. $d_4 = 5$, protože čtyři čísla lze uzávorkovat pěti způsoby: $a_1.\big(a_2.(a_3.a_4)\big)$, $a_1.\big((a_2.a_3).a_4\big)$, $\big((a_1.a_2).a_3\big).a_4$, $\big(a_1.(a_2.a_3)\big).a_4$, $(a_1.a_2).(a_3.a_4)$

Jelikož z defince funkce f plyne, že $f(0) = 0$, vyhovuje nám řešení

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-4)^n x^n\,.$$

Rozvoj funkce do mocninné řady je jednoznačný, proto porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme po malé úpravě

$$d_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\,.$$

Čísla (d_n) se nazývají Catalanova čísla.[2]

4) Výpočet hodnot funkcí

Pro libovolné $x \in \langle -1, 1\rangle$ lze hodnotu $\operatorname{arctg} x$ určit jako součet řady (3.1), která střídá znaménka a navíc posloupnost n-tých členů řady je monotonní. Podle poznámky u Leibnizova kritéria je chyba mezi skutečnou hodnotou funkce a součtem prvních n členů řady menší, než je absolutní hodnota prvního zanedbaného členu. Pro odhad chyby proto nepotřebujeme uvažovat zbytek v Taylorově vzorci. Ten totiž vyžaduje znalost n-té derivace funkce $\operatorname{arctg} x$, kterou nemáme k dispozici. Např.

$$\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} + \text{ chyba}, \quad \text{kde} \quad |\text{chyba}| < \frac{1}{7.10^7}\,.$$

K určení hodnoty $\operatorname{arctg}(10)$ nelze přímo využít rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ do mocninné řady, protože pro $x = 10 > 1$ řada diverguje. Stačí si však vzpomenout na vztah $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$. Z toho dostaneme

$$\operatorname{arctg}(10) = \tfrac{\pi}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{5.10^5} + \text{ chyba}, \quad \text{kde} \quad |\text{chyba}| < \frac{1}{7.10^7}\,.$$

Teď však potřebujeme znát dostatečně přesně hodnotu čísla $\frac{\pi}{2}$. Pro jeho určení lze využít opět řadu (3.1), jelikož

$$\tfrac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2}{2n+1}\,.$$

Abychom udrželi chybu v určení $\operatorname{arctg}(10)$ pod velikostí 10^{-7}, musíme spočítat hodnotu π s přesností lepší než $\frac{6}{7.10^7}$. V předchozí řadě je však první zanedbaný člen menší než tato chyba až pro n v řádu milionů, což vyžaduje sečíst miliony zlomků. Hodnotu π lze lépe určit z tzv. Machinovy formule, která se odvozuje v 1. semestru a má tvar

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{239}\right).$$

[2] Belgičan E. Ch. Catalan (1814-1894) zkoumal, kolika způsoby lze pomocí neprotínajících se úhlopříček rozdělit pravidelný n-úhleník na trojúhelníky. Řešením je právě číslo d_{n-1}.

K dostatečně přesnému určení $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)$ a $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$ opět postačí sečíst několik málo počátečních členů řady.

Evaluace funkce $\operatorname{arctg} x$ je podstatně ulehčená faktem, že odpovídající rozvoj do mocninné řady je řada se střídavými znaménky. Stejnou vlastnost mají i funkce $\sin x$ a $\cos x$. Avšak řada $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro kladná x nestřídá znaménka. Tuto "vadu"lze při výpočtu např. $\sqrt{e} = e^{1/2}$ překonat tím, že určíme dostatečně přesně součet řady se střídavými znaménky

$$e^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}$$

a pak vezmeme převrácenou hodnotu výsledku. Algoritmům na výpočet elementárních funkcí a jejich implementacím se právem věnuje velká pozornost, viz [9].

Kapitola 4

Primitivní funkce

4.1 Definice primitivní funkce

Tato kapitola je věnována postupu inverznímu k derivování.

Definice 4.1.1. Nechť funkce f je definována v intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$\big(\forall x \in (a, b)\big)\big(F'(x) = f(x)\big)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f v intervalu (a, b).

Poznámka. Uveďme jednoduchá pozorování.

1. Primitivní funkce není pojem lokální, nemá tedy smyslu mluvit o primitivní funkci bez udání intervalu.

2. Je-li F primitivní funkcí k f v intervalu (a, b), pak F je primitivní k f i v každém podintervalu $(c, d) \subset (a, b)$.

3. Z definice primitivní funkce plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b), a tedy F je nutně spojitá na (a, b).

Příklad 4.1.2. Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ v libovolném intervalu (a, b).

Definice primitivní funkce vyvolává hned dvě otázky: 1) zda ke každé funkci f existuje primitivní funkce a 2) kolik primitivních funkcí může k dané funkci f existovat.

Věta 4.1.3. *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$G(x) = F(x) + c \qquad \textit{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz. Když F a G jsou funkce primitivní k f, pak $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Proto funkce $F - G$ je konstantní na intervalu (a, b).
Důkaz obrácené implikace je triviální. □

Definice 4.1.4. Nechť k funkci f existuje primitivní funkce v intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem**[1] a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Poznámka. Najdeme-li k f primitivní funkci F v intervalu (a, b), zapisujeme obvykle

$$\int f(x)\mathrm{d}(x) \ = \ F(x) + c\,,$$

zde f je integrovaná funkce, x je integrační proměnná a c se nazývá integrační konstantou. Úkolu určit $\int f(x)\mathrm{d}x$ říkáme "najít primitivní funkci k f", nebo "vypočítat integrál z f", nebo "integrovat f".

Otázku existence primitivní funkce částečně řeší následující věta.

Věta 4.1.5. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má v tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz bude plynout z tvrzení, které dokážeme v kapitole Určitý integrál. Čtenář nemusí mít obavu, že bychom této věty nebo jejích důsledků využívali pro důkazy tvrzení v kapitole Určitý integrál. Nepůjde tedy o bludný kruh. Na místě je otázka, proč nejdříve neprobereme kapitolu Určitý integrál a pak nepokračujeme kapitolou Neurčitý integrál. Souvisí to s časovým rozvrhem cvičení. Vyložit teorii k neurčitému integrálu je jednoduché, zato naučit se prakticky hledat neurčitý integrál je otázkou různých triků. Pro určitý integrál je situace opačná.

Příklad 4.1.6. Podívejme se na existenci integrálu k funkci $sgn\, x$, která není na $\mathbb{R}$ spojitá. Kdyby primitivní funkce F existovala, tak pro $x > 0$ by musela mít tvar $F(x) = x + c_1$. Pro záporné x zase $F(x) = -x + c_2$. Protože primitivní funkce musí být všude spojitá, je nutně $c_1 = c_2 = c$ a jediný možný kandidát je $F(x) = |x| + c$. Tato funkce nemá však v bodě 0 derivaci. Tedy k funkci $sgn\, x$ v intervalu $\mathbb{R}$ neexistuje primitivní funkce.

Na druhé straně i funkce f, která není spojitá na $\mathbb{R}$ může mít v $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

Příklad 4.1.7. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro} \ \ x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \ \ x = 0 \end{cases},$$

[1] Leibniz zavedl operační symbol $\int$ pro integrování (je odvozen z prvního písmene slova suma), název integrál však pochází od Jakoba Bernoulliho. Leibniz pak po dohodě s Johannem Bernoullim zavedl označení "integrální počet"(calculus integralis), a to místo dřívějšího termínu "inverzní metoda tečen".

která není v bodě 0 spojitá, jelikož neexistuje ani $\lim_0 f$. Primitivní funkcí k funkci f v intervalu $\mathbb{R}$ je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} .$$

Snadným výpočtem pro $x \neq 0$ dostaneme $F'(x) = f(x)$ a derivace $F'(0)$ spočítáme přímo z definice $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$.

Následující věta je jednoduchým důsledkem základních pravidel pro derivování.

Věta 4.1.8. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkcím f resp. g v intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak*

$F \pm G$ je primitivní funkcí k funkci $f \pm g$ v intervalu (a, b);
αF je primitivní funkcí k funkci αf v intervalu (a, b).

Poznámka. Větu symbolicky zapisujeme $\int (f + g) = \int f + \int g$ a $\int (\alpha f) = \alpha \int f$.

Pro přehlednost shrneme neurčitý integrál některých základních funkcí do tabulky.

$\int \mathrm{d}x \quad = \quad x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} - \{0\}, & \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq -2 \\ x \in (0, +\infty), & \alpha \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
$\int b^x \, \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{b^x}{\ln b}$	$x \in \mathbb{R}, \quad b > 0, b \neq 1$
$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \quad = \quad \begin{cases} \ln x \\ \ln(-x) \end{cases}$	$x \in (0, +\infty)$ $x \in (-\infty, 0)$
$\int \sin x \, \mathrm{d}x \quad = \quad -\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x \quad = \quad \sin x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \quad = \quad \operatorname{tg} x + c$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x \quad = \quad -\operatorname{cotg} x + c$	$x \in (k\pi, k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \quad = \quad \arcsin x + c$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \quad = \quad \operatorname{arctg} x + c$	$x \in \mathbb{R}$

4.2 Metody výpočtu primitivní funkce

Uvedeme dvě metody hledání primitivní funkce. Metoda integrace per partes je odvozena na základě vzorce pro derivování součinu dvou funkcí $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Substituční metoda je založena na vzorci pro derivování složené funkce $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$.

Věta 4.2.1. (metoda per partes v neurčitém integrálu) *Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v intervalu (a,b) a nechť funkce H je primitivní funkcí k funkci $f.g'$ v (a,b). Pak $f.g - H$ je primitivní funkcí k funkci $f'g$ v (a,b).*

Důkaz. Z předpokladů plyne, že pro každé $x \in (a,b)$ je

$$\big(f(x).g(x) - H(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x).$$

To podle definice znamená, že $f.g - H$ je primitivní funkcí k $f'g$ v (a,b). $\square$

Pro zápis metody per partes v symbolech neurčitého integrálu se běžně používá

$$\int (f'g) = fg - \int (fg').$$

Příklad 4.2.2. Při výpočtu neurčitého integrálu $\int x \sin x \; \mathrm{d}x$ metodou per partes položíme

$$g(x) = x \;\text{ a }\; f'(x) = \sin x \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 1 \;\text{ a }\; f(x) = -\cos x\,.$$

Proto

$$\int x \sin x \; \mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x \; \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + c\,.$$

Příklad 4.2.3. Někdy je zapotřebí postup metodou per partes opakovat. V následujícím výpočtu jsme volili nejdříve

$$g_1(x) = x^2 \;\text{ a }\; f_1'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad g_1'(x) = 2x \;\text{ a }\; f_1(x) = e^x\,,$$

abychom dostali

$$\int x^2 e^x \; \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\int x e^x \; \mathrm{d}x = *\,,$$

V dalším výpočtu pokračujeme metodou per partes a volíme

$$g_2(x) = x \;\text{ a }\; f_2'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad g_2'(x) = 1 \;\text{ a }\; f_2(x) = e^x\,.$$

Tím dostaneme konečný výsledek

$$* = x^2e^x - 2\int xe^x \, \mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x \, \mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\,.$$

Příklad 4.2.4. Pro zvolené $g'(x)$ v metodě per partes můžeme použít různá $g(x)$, navzájem se lišící o konstantu. V obou následujících postupech zvolíme $f(x) = \ln(x+1)$ a $g'(x) = 1$, ale jednou vezmeme $g(x) = x$ a podruhé $g(x) = x + 1$,

$$\int \ln(x+1) \, \mathrm{d}x = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} \, \mathrm{d}x = x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c$$

nebo druhým postupem,

$$\int \ln(x+1) \, \mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - \int \mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - x + c\,.$$

Věta 4.2.5. (o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť pro funkce f a ϕ platí*

(i) f má primitivní funkci F v intervalu (a,b),

(ii) ϕ je v intervalu (α,β) diferencovatelná,

(iii) $\phi(\alpha,\beta) \subset (a,b)$.

Pak $F \circ \phi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \phi).\phi'$ v intervalu (α,β).

Důkaz. $\big((F \circ \phi)(x)\big)' = F'\big(\phi(x)\big).\phi'(x) = f\big(\phi(x)\big).\phi'(x)$ v intervalu (α,β). □

Symbolicky zápisujeme substituční metodu v neurčitém integrálu takto

$$\int f\big(\phi(t)\big).\phi'(t) \, \mathrm{d}t = \int f(x) \, \mathrm{d}x,$$

kde za x do primitivní funkce k funkci f dosadíme $x = \phi(t)$.

Příklad 4.2.6. Pro určení primitivní funkce k funkci $\operatorname{tg} t$ v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ nejdříve úpravami docílíme, že integrovaná funkce bude tvaru $f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$,

$$\int \operatorname{tg} t \, \mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, \mathrm{d}t = -\int \frac{-\sin t}{\cos t} \, \mathrm{d}t = -\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\ln(-x) + c = -\ln(-\cos t) + c\,.$$

Protože $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, máme $x = \cos t \in (-1, 0)$. Využili jsme toho, že primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ je v intevralu $(-1, 0)$ funkce $\ln(-x)$.

Příklad 4.2.7. V intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hledáme tento neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\cos t} \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \,\mathrm{d}t\,.$$

Uvažujme vnitřní funkci $\phi(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Neurčitý integrál tak stačí vypočítat pro hodnoty $x = \phi(t) \in (-1, 1)$,

$$2\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \mathrm{d}x = \ln\frac{x+1}{1-x} + c\,.$$

Z věty o substituci dostaneme

$$\int \frac{1}{\cos t} \,\mathrm{d}t = \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} + c\,.$$

V předchozích příkladech jsme upravili integrovanou funkci do tvaru $f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$ a pak počítali neurčitý integrál z jednodušší funkce $f(x)$. Někdy se stane, že funkce $f(x)$ je pro integrování obtížná, zatímco při vhodně zvolené vnitřní funkci $\phi(t)$ je funkce $f(\phi(t)).\phi'(t)$ jednoduchá. Ovšem otázkou je, kdy nás věta 4.2.5 k takovému postupu opravňuje.

Poznámka. Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť ψ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Z věty o derivaci inverzní funkce dostaneme pro každé $\tau \in (a, b)$

$$\psi'\left(\psi^{-1}(\tau)\right) . \left(\psi^{-1}\right)'(\tau) = 1.$$

Předpokládejme, že na intervalu (α, β) existuje neurčitý integrál

$$\int f(\psi(t))\psi'(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

Ve větě o substituci za vnitřní funkci vezmeme $\psi^{-1} : (a, b) \mapsto (\alpha, \beta)$. Pak existuje integrál

$$\int f\Big(\underbrace{\psi\left(\psi^{-1}(\tau)\right)}_{=\,\tau}\Big)\, \underbrace{\psi'\left(\psi^{-1}(\tau)\right)\left(\psi^{-1}\right)'(\tau)}_{=\,1} \,\mathrm{d}\tau = \int f(\tau) \,\mathrm{d}\tau$$

v intervalu (a, b). Když tedy do primitivní funkce k funkci $f(\psi(t))\psi'(t)$ dosadíme $\psi^{-1}(\tau)$ za proměnnou t, dostaneme primitivní funkci k funkci $f(\tau)$. Symbolicky,

$$\int f(\psi(t))\psi'(t) \,\mathrm{d}t = G(t) + c \quad\Longrightarrow\quad \int f(\tau) \,\mathrm{d}\tau = G\left(\psi^{-1}(\tau)\right) + c\,.$$

Příklad 4.2.8. V intervalu $\mathbb{R}$ hledáme neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Jako vnitřní funkci použijeme bijektivní zobrazení $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definované předpisem $\psi(t) = \sinh t$ s kladnou derivací $\psi'(t) = \cosh t$. Funkce ψ je bijekcí. Hledáme tedy primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\,\cosh t\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c = \sinh^{-1} x + c = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr) + c\,.$$

Pro odvození inverzní funkce k sinu hyperbolickému stačilo řešení kvadratické rovnice:

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \bigl(e^t\bigr)^2 - 2e^t x - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad e^t = x \pm \sqrt{1+x^2}\,.$$

Protože $e^t > 0$ a $x - \sqrt{1+x^2} < 0$, vyhovuje nám kořen rovnice $x + \sqrt{1+x^2}$. Po zlogaritmování dostaneme $\sinh^{-1} x = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)$.

Hledání inverzní funkce k sinu hyperbolickému se můžeme vyhnout, když použijeme jinou vnitřní funkci, a to $x = \phi(t) = \operatorname{tg} t$, kde můžeme zvolit např. $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}\;\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Poslední integrál jsme už počítali v příkladě 4.2.7; do jeho výsledku stačí dosadit inverzní funkci k tangens. Dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)} + c\,.$$

Primitivní funkce, kterou jsme dostali při použití substituce $x = \operatorname{tg} t$, se liší od primitivní funkce získané po substituci $x = \sinh t$. Tato rozdílnost je jenom zdánlivá. Primitivní funkce získané různými postupy se mohou lišit podle věty 4.1.3 nanejvýš o konstantu. V našem případě je konstanta 0, tj. funkce jsou si rovny. Další substitucí, která vede k nalezení primitivní funkce, je $x = \frac{1-t^2}{2t}$. Necháme na čtenáři, aby získal třetí možný tvar výsledku.

4.3 Primitivní funkce speciálních tříd funkcí

Bohužel jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Například je známo, že neurčité integrály

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{nebo} \quad \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Přitom se jedná o integrály ze spojitých funkcí na příslušných intervalech, a tedy primitivní funkce musejí existovat, nejsou však zapsatelné pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání, invertování) ze základních funkcí $(x^\alpha, \alpha^x, \sin x)$. V příkladu 1.2.3 jsme ukázali, že

$$e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, y^n \quad \text{pro každé} \ \ y \in \mathbb{R},$$

tedy také

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} \quad \text{pro každé} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Proto podle pravidel pro derivování mocninné řady snadno ověříme, že na $\mathbb{R}$ je

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\, x^{2n+1} + c,$$

Rozpoznat, kdy funkce má "rozumnou"primitivní funkci, je často složité a na rozdíl od derivování, které je rutinní záležitostí, je integrování uměním. V podstatě jediná třída funkcí, ke kterým existuje přesný návod jak integrovat, jsou racionální funkce a funkce, které po vhodné substituci v integrálu lze na racionální funkce převést.

I. $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, kde p a q jsou polynomy s reálnými koeficienty.

Nejdříve ukážeme, že stačí uvažovat případ, kdy **stupeň** $p <$ **stupeň** q. Kdyby totiž stupeň $p \geq$ stupeň q, pak dělením získáme $p(x) = u(x)q(x) + v(x)$, kde stupeň $v <$ stupeň q. Po dosazení dostaneme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{v(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$. Najít neurčitý integrál k polynomu $u(x)$ je jednoduché a zbývá tedy integrál z podílu dvou polynomů, kde už stupeň polynomu v čitateli je ostře menší než stupeň jmenovatele.

Klíčem k řešení problému je **rozklad** $\frac{p(x)}{q(x)}$ **na parciální zlomky**. Využijeme vlastnost polynomu s reálnými koeficienty: $q(\overline{x}) = \overline{q(x)}$ pro každé $x \in \mathbb{C}$. To implikuje, že když λ je kořen polynomu $q(x)$ s násobností l, pak komplexně združené $\overline{\lambda}$ je rovněž kořenem se stejnou násobností. Polynom q je tedy dělitelný výrazem

$$(x-\lambda)^l(x-\overline{\lambda})^l = \left(x^2-(\lambda+\overline{\lambda})x+\lambda\overline{\lambda}\right)^l = (x^2+\beta x+\gamma)^l,$$

kde $\beta = \lambda+\overline{\lambda}$ a $\gamma = \lambda\overline{\lambda}$ jsou reálné konstanty. Protože trojčlen $x^2+\beta x+\gamma$ nemá reálné kořeny, je diskriminant $D = \beta^2-4\gamma < 0$. Z toho už plyne následující lemma.

Lemma 4.3.1. *Polynom q s reálnými koeficienty a s koeficientem c u největší mocniny lze rozložit do tvaru*

$$q(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\dots(x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{l_r}, \tag{4.1}$$

kde $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ jsou různé reálné kořeny a kde $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ pro $i=1,\dots,r$ jsou různé kvadratické výrazy se záporným diskriminantem.

Věta 4.3.2. (rozklad na parciální zlomky) *Nechť p a q jsou nenulové polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň $p <$ stupeň q a nechť rozklad q má tvar* (4.1). *Pak existují*

reálné konstanty A_{ij}, kde $i=1,\dots,s$, $j=1,\dots,k_i$ a

reálné konstanty B_{ij} a C_{ij}, kde $i=1,\dots,r$, $j=1,\dots,l_i$

takové, že

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\dots+\frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\dots+\frac{A_{sk_s}}{(x-\alpha_s)^{k_s}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2}+\dots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}}+\dots+\frac{B_{rl_r}x+C_{rl_r}}{(x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{l_r}}$$

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle stupně polynomu q. Když stupeň polynomu q je 1, pak stupeň p je 0, tj. $p(x) = const.$ a podíl p/q je přímo požadovaného tvaru. Předpokládejme, že stupeň polynomu q je $n \geq 2$. Diskutujme dva případy.

a) Nechť $q(x)$ má alespoň jeden reálný kořen α; jeho násobnost označme k. Pak $q(x) = (x-\alpha)^k r(x)$, kde stupeň $r(x)$ je $n-k$ a $r(\alpha)\neq 0$. Položíme-li $A = p(\alpha)/r(\alpha)$, pak polynom $p(x)-Ar(x)$ má kořen α, což znamená, že tento polynom lze napsat jako $p(x)-Ar(x) = (x-\alpha)\tilde{p}(x)$, přičemž stupeň $\tilde{p}$ je o jedničku menší než stupeň p. Platí

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{p(x)-Ar(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{(x-\alpha)\tilde{p}(x)}{(x-\alpha)^k r(x)} =$$

$$= \frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{\tilde{p}(x)}{\underbrace{(x-\alpha)^{k-1}r(x)}_{=:\ \tilde{q}(x)}},$$

a tedy stupeň $\tilde{q}$ je o jedničku menší než stupeň q. Jelikož stupeň p byl menší než stupeň q, je také stupeň $\tilde{p}$ menší než stupeň $\tilde{q}$ a podíl polynomů $\tilde{p}(x)/\tilde{q}(x)$ lze rozložit na parciální zlomky podle indukčního předpokladu.

b) Nechť $q(x)$ nemá žádný reálný kořen. Je-li stupeň q roven $n = 2$, je podíl $p(x)/q(x)$ už požadovaného tvaru. Proto diskutujme případ $n > 2$. Uvažujeme komplexní kořen λ, k němu komplexně združený kořen $\overline{\lambda}$ a jejich společnou násobnost l. Tedy $(x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) = x^2 + \beta x + \gamma$, kde β a γ jsou reálné. Pak $q(x)$ lze psát jako $q(x) = (x^2 + \beta x + \gamma)^l r(x)$, kde $r(x)$ je reálný polynom stupně $n - 2l$, který nemá kořen λ ani $\overline{\lambda}$. Nalezneme reálné konstanty B a C tak, aby polynom $p(x) - (Bx + C)r(x)$ měl kořeny λ a $\overline{\lambda}$ (čtenář ať ověří, že to skutečně je možné). Můžeme napsat $p(x) - (Bx+C)r(x) = (x^2+\beta x+\gamma)\tilde{p}(x)$. Podobně jako v předchozím případě dostaneme

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^l r(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^l} + \frac{p(x)-(Bx+C)r(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^l r(x)} =$$

$$= \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^l} + \frac{\tilde{p}(x)}{\underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^{l-1} r(x)}_{=:\ \tilde{q}(x)}}.$$

Opět je stupeň $\tilde{p}(x) <$ stupeň $\tilde{q}(x) <$ stupeň $q(x)$, což umožní použít indukční předpoklad a rozložit $\tilde{p}(x)/\tilde{q}(x)$ na parciální zlomky. □

Po rozkladu podílu dvou polynomů na parciální zlomky tedy stačí umět integrovat

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x\ .$$

První integrál je jednoduchý. Věnujme se proto druhému z nich. Integrovanou funkci upravíme tak, abychom v čitateli dostali derivaci kvadratického výrazu ze jmenovatele:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{A}} + \Big(C - \frac{B}{2}\beta\Big)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{B}}\ .$$

Podle věty o substituci spočítáme

$$\mathcal{A} = \int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^k}\,\mathrm{d}y, \qquad \text{kde za } y \text{ dosadíme } x^2+\beta x+\gamma\ .$$

Zbývá tedy zvládnout integraci výrazů typu

$$\mathcal{B} = \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}x\,,$$

kde diskriminant $D = \beta^2 - 4\gamma < 0$. Jelikož

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4}\right) = \frac{-D}{4}\left(\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{-D}}\right)^2 + 1\right) \,,$$

dostaneme po substituci $\frac{2x+\beta}{\sqrt{-D}} = y$

$$\mathcal{B} = const. \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,\mathrm{d}y\,.$$

Na závěr ukážeme, jak vypočítat

$$I_k := \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x\,.$$

Když $k = 1$, pak z tabulky základních integrálů máme $I_1 = \operatorname{arctg} x + const.$ Pro $k > 1$ aplikujme na výpočet I_k metodu per partes:

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\int x\,\frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{k+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud

$$I_k = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad I_{k+1} = \frac{1}{2k}\,\frac{x}{(x^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}\,I_k\,.$$

Integrál $\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x$ určíme podle předchozí rekurence ze znalosti intergálu $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}\,\mathrm{d}x$, a ten zase z integrálu $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-2}}\,\mathrm{d}x$ atd. Po $k-1$ krocích se dostaneme ke známému integrálu $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\, x + const.$

Popsali jsme algoritmus, jak nalézt primitivní funkci k racionální funkci. Jeho první krok, a to nalezení rozkladu (4.1) polynomu ve jmenovateli, je však pro polynomy stupně vyššího než 4 obecně v principu nemožné.

Další třídy funkcí, ke kterým umíme najít neurčitý integrál, jsou funkce, které lze vhodnou substitucí převést na integrál z podílu dvou polynomů. Pro popis těchto typů budeme využívat pojem racionální funkce ve dvou proměnných. Rozumíme tím funkci R tvaru $R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, kde $p(x,y)$ a $q(x,y)$ jsou polynomy ve dvou proměnných s reálnými koeficienty.

II. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$, $R(x,y)$ je racionální funkce a $ad - bc \neq 0$.

Uvažujme vnitřní funkci

$$\psi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,.$$

Výrazy x a $\psi'(x)$ lze vyjádřit jako racionální funkce v proměnné $y = \psi(x)$. Po snadných úpravách konkrétně dostaneme

$$x = \psi^{-1}(y) = \frac{b - dy^n}{cy^n - a} \quad \text{a} \quad \left(\psi^{-1}\right)'(y) = \frac{ad - bc}{(cy^n - ad)^2}\, ny^{n-1}\,.$$

Výsledkem je úloha hledat primitivní funkci k racionální funkci.

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{b - dy^n}{cy^n - a}, y\right) \frac{ad - bc}{(cy^n - ad)^2}\, ny^{n-1}\, \mathrm{d}y\,.$$

III. $\int x^m\big(a + bx^n\big)^p\, \mathrm{d}x$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, a navíc $a, b, n, p \neq 0$.

Nejdříve použijeme substituci $x^n = \phi(x) = t$. Při této substituci

$$\int x^m\big(a + bx^n\big)^p\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\big(a + bt\big)^p\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\Big(\frac{a+bt}{t}\Big)^p\, \mathrm{d}t\,.$$

- Je-li $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, jedná se o funkce zahrnuté v předchozím bodě. Pro převod na racionální funkci stačí substituovat $y = \sqrt[s]{a + bt}$, kde s je jmenovatel racionálního čísla p.
- Je-li $p \in \mathbb{Z}$, je situace stejná; substituujeme $y = \sqrt[s]{t}$, kde s je jmenovatel racionálního čísla $\frac{m+1}{n}$.
- Je-li $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, lze opět využít přechozí případ. K racionální funkci pod integrálem vede substituce $\sqrt[s]{\frac{a+bt}{t}} = y$, kde s je jmenovatel čísla p.

Případy, které jsme dosud probírali, jsou pouze speciálními podpřípady předchozího bodu. Pro ostatní případy, kdy ani jedno z čísel $p, \frac{m+1}{n}, p+\frac{m+1}{n}$ není celé, dokázal Čebyšev, že nelze nalézt primitivní funkci v elementárním tvaru. Pro tento důležitý dovětek dostaly integrály $\int x^m\big(a + bx^n\big)^p\, \mathrm{d}x$ své jméno. Říká se jim **binomické integrály**. Například integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}\, \mathrm{d}x = \int x^0\left(1 - x^3\right)^{-1/2}\, \mathrm{d}x\,,$$

je binomický s parametry $m = 0$, $n = 3$ a $p = -1/2$. Výsledek proto hledáme rovnou ve tvaru mocninné řady

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \mathit{const.}$$

IV. $\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)\, \mathrm{d}x$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, a R je racionální funkce ve dvou proměnných.

V tomto případě jenom vyjmenujeme substituce (říká se jim **Eulerovy substituce**), které vedou k integraci racionální funkce. Převod samotný necháváme na čtenáři.

- Když $a > 0$, volíme novou proměnnou t tak, aby platilo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.
- Když $c > 0$, volíme novou proměnnou t tak, aby platilo $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
- Když výraz pod odmocninou má reálné kořeny, tj. existuje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, že $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, klademe $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha)$.

Je zřejmé, že pokud $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je výraz definovaný na nějakém intervalu, pak nejméně jednu z vyjmenovaných substitucí lze použít. Často se stane, že lze použít dvě nebo dokonce všechny tři substituce.

V. $\int R\big(\sin x, \cos x\big)\, \mathrm{d}x$, kde R je racionální funkce ve dvou proměnných.

Substituci, kterou uvedeme, můžeme použít na intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Omezíme se na základní interval a položíme

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \phi(x) = y \quad \text{pro} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Vyjádříme $\sin x$ a $\cos x$ jako racionální funkce v proměnné y

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,,$$

a tedy

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad \text{a} \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Jelikož $\cos\frac{x}{2}$ je na intervalu $(-\pi, \pi)$ kladný, je znaménko $\sin\frac{x}{2}$ stejné jako znaménko $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$. Proto $\sin\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ a $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Ze vzorců pro poloviční úhly dostaneme

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Protože navíc i derivaci $\phi'(x)$ lze vyjádřit jako racionální funkci v proměnné y

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{y^2+1}{2}\,,$$

bude funkce, která po substituci za znakem integrálu vznikne, racionální v proměnné y

$$\int R\left(\frac{y}{1+y^2}\,,\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\ \frac{2}{y^2+1}\ \mathrm{d}y\,.$$

Kapitola 5

Riemannův integrál

5.1 Určitý integrál: Cauchyova-Riemannova definice

Definice 5.1.1. Je dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nazýváme **rozdělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům x_k pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ říkáme dělicí body intervalu $\langle a, b\rangle$; intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$ při rozdělení σ.

Definice 5.1.2. Nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme **normou rozdělení** σ.

Příklad 5.1.3. Rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$\sigma = \{a, a+\Delta, a+2\Delta, \ldots, a+(n-1)\Delta, a+n\Delta = b\}\,, \quad \text{kde} \ \ \Delta = (b-a)/n\,,$$

má všechny vzdálenosti mezi dělicími body stejné. Proto se mu říká **ekvidistantní**. Jeho normou je $\Delta = \frac{b-a}{n}$.

Definice 5.1.4. Nechť σ a σ' jsou rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$. Pak σ' nazýváme **zjemněním** rozdělení σ.

Poznámka. 1) Když σ' je zjemněním σ, pak pro normy platí nerovnost $\nu(\sigma) \geq \nu(\sigma')$.
2) Když σ_1 a σ_2 jsou dvě rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\sigma_1 \cup \sigma_2$ je společným zjemněním rozdělení σ_1 i σ_2.

Definice 5.1.5. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \qquad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \qquad \text{a} \qquad s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, součtem funkce f při rozdělení σ.

Věta 5.1.6. *Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Pak pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí*

$$m(b-a) \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le M(b-a)\,.$$

Důkaz. Z definice čísel M, m, M_i, m_i plyne $m \le m_i \le M_i \le M$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Vynásobením těchto nerovností kladným Δ_i a sčítáním přes $i = 1, 2, \dots, n$ dostaneme

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \;\le\; M\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\,.$$

Protože $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = b-a$, důkaz je hotov. □

Důsledek 5.1.7. *Množina dolních i horních součtů je omezená.*

Lemma 5.1.8. *Nechť f je funkce omezená konstantou K na intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \le K$. Nechť dále σ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a σ' jeho zjemnění. Pak*

$$S(\sigma) - 2Kp\nu(\sigma) \le S(\sigma') \le S(\sigma) \qquad \text{a} \qquad s(\sigma) \le s(\sigma') \le s(\sigma) + 2Kp\nu(\sigma)\,,$$

kde p je počet bodů množiny $\sigma' - \sigma$.

Důkaz. Nejdříve uvažujme zjemnění $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$ pro $c \notin \sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tedy původní rozdělení zjemníme přidáním jediného bodu. Nechť c leží v i-tém částečném intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Platí

$$S(\sigma') = S(\sigma) - (x_i - x_{i-1}) \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) + (x_i - c)\sup_{\langle c,x_i\rangle} f(x) + (c - x_{i-1}) \sup_{\langle x_{i-1},c\rangle} f(x) =$$

$$= S(\sigma) - (x_i - c)\underbrace{\Big(\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \sup_{\langle c,x_i\rangle} f(x)\Big)} - (c - x_{i-1})\underbrace{\Big(\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \sup_{\langle x_{i-1},c\rangle} f(x)\Big)}\,.$$

Výrazy ve svorkách jsou zřejmě nezáporné a nepřesahují hodnotu $2K$. Můžeme odhadnout

$$S(\sigma) \ge S(\sigma') \ge S(\sigma) - 2K(x_i - c) - 2K(c - x_{i-1}) = S(\sigma) - 2K\Delta_i \ge S(\sigma) - 2K\nu(\sigma)\,.$$

Zjemnění σ', které vznikne ze σ přidáním p nových bodů, můžeme postupně vytvářet přidáváním jednoho bodu, které provedeme p krát. Při žádném kroku se norma nového zjemnění nezvětšuje. Použijeme-li odhad získaný pro přidání jednoho bodu p krát, dostaneme

$$S(\sigma) \geq S(\sigma') \geq S(\sigma) - 2Kp\nu(\sigma)\,.$$

Důkaz nerovnosti pro dolní součty je analogický. □

Věta 5.1.9. *Nechť f je funkce omezená na $\langle a,b\rangle$ a nechť σ_1 a σ_2 jsou dvě rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2).$$

Důkaz. Jelikož $\sigma_1 \cup \sigma_2$ je společným zjemněním obou rozdělení, plyne z lemmatu 5.1.8

$$s(\sigma_1) \leq s(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(\sigma_2)\,.$$

□

Budou nás zajímat množiny všech horních a všech dolních součtů, tedy množiny

$$\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\} \quad \text{a} \quad \{s(\sigma) \mid \sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\}.$$

Už jsme ukázali, že obě tyto množiny jsou omezené zdola závorou $m(b-a)$ a shora závorou $M(b-a)$. Těchto závor se při volbě nejhrubšího rozdělení $\sigma = \{a,b\}$ nabývá,

$$\max_{\sigma} S(\sigma) = M(b-a) \ \text{ a } \ \min_{\sigma} s(\sigma) = m(b-a)$$

Daleko zajímavější je zkoumání $\inf S(\sigma)$ a $\sup s(\sigma)$.

Definice 5.1.10. Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$. Infimum množiny horních součtu a supremum množiny dolních součtů nazýváme **horním**, resp. **dolním integrálním součtem** funkce f a značíme

$$\int_a^{\overline{b}} f = \inf_{\sigma} S(\sigma)\,, \quad \text{resp.} \quad \int_{\underline{a}}^b f = \sup_{\sigma} s(\sigma)\,.$$

Věta 5.1.11. *Pro funkci omezenou na $\langle a,b\rangle$ platí*

$$\int_{\underline{a}}^b f \ \leq \ \int_a^{\overline{b}} f\,.$$

Důkaz. Zvolíme libovolně pevné rozdělení σ_1. Pro každé rozdělení σ_2 platí $s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$, tedy $s(\sigma_1)$ je dolní závorou množiny horních součtů. Z definice infima jako největší dolní závory plyne

$$s(\sigma_1) \leq \inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$$

Protože tato nerovnost platí pro každé σ_1, je číslo $\inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$ horní závorou pro množinu dolních součtů. Nyní z definice suprema jako nejmenší horní závory množiny dostaneme $\sup_{\sigma_1} s(\sigma_1) \;\leq\; \inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$, což jsme chtěli ukázat. □

Teď už můžeme uvést definici určitého integrálu[1] spojovanou se jmény Cauchyho a Riemanna.

Definice 5.1.12. Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Je-li $\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\underline{b}} f$, říkáme, že f má v intervalu $\langle a, b\rangle$ **Riemannův integrál**. Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. O funkci f říkáme, že je **integrovatelná** v $\langle a, b\rangle$.

Příklad 5.1.13. Funkce konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$ má pro každé rozdělení σ stejný horní i dolní součet $s(\sigma) = S(\sigma) = c\cdot(b-a)$. Proto se horní i dolní integrální součet shoduje a platí $\int_a^b c = c\cdot(b-a)$.

Příklad 5.1.14. Funkce Dirichletova má $\sup_J f = 1$ a $\inf_J f = 0$ na každém intervalu $J = \langle a, b\rangle$. Proto $s(\sigma) = 0\cdot(b-a)$ a $S(\sigma) = 1\cdot(b-a)$. Z toho plyne

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = 0, \qquad \int_{a}^{\underline{b}} f = b-a, \qquad \text{a proto} \int_a^b f \;\text{ neexistuje.}$$

Rozhodovat o existenci integrálu nám umožní další věta.

Věta 5.1.15. (nutná a postačující podmínka existence integrálu) *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$\int_a^b f \;\; \textit{existuje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0)\big(\exists \textit{ rozdělení } \sigma \textit{ intervalu } \langle a, b\rangle\big)\Big(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon\Big).$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Protože $\int_a^{\underline{b}} f = \inf_\sigma S(\sigma)$, najdeme z druhé vlastnosti infima k libovolnému $\varepsilon > 0$ rozdělení σ_1 tak, že

$$S(\sigma_1) < \int_a^{\underline{b}} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně protože $\int_{\underline{a}}^b f = \sup_\sigma s(\sigma)$, najdeme rozdělení σ_2 tak, že

$$s(\sigma_2) > \int_{\underline{a}}^b f - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

[1]Diferenciální a integrální počet vybudovali nezávisle Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz. Do ucelené teorie zahrnuli všechny roztříštěné, izolované objevy svých předchůdců. Oba pracovali s pojmem nekonečně malé veličiny. I když měli jisté pochybnosti o aktuální existenci nekonečně malých veličin, praktické výpočty, které bylo možné na jejich základě provádět, pochybnosti rozptýlily. V dnešní době s takovými výpočty zacházíme opatrněji, pracujeme s pojmy upřesněnými pomocí limity a nikoliv s infinitezimálními veličinami. Poznamenejme, že současná matematika se k postupům práce s infinitezimálními veličinami vrátila v rámci formálně vybudované nestandardní analýzy.

Položme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$. Toto rozdělení je společným zjemněním σ_1 i σ_2. Použijeme-li lemma 5.1.8, dva předešlé odhady a předpoklad existence $\int_a^b f$, tj. že $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, máme

$$S(\sigma) - s(\sigma) \leq S(\sigma_1) - s(\sigma_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Protože horní a dolní integrální součet je infimem resp. supremem jisté množiny, plyne přímo z definice

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \ \leq\ S(\sigma) - s(\sigma) \quad \text{pro každé rozdělení } \ \sigma\,.$$

Pravou stranu umíme z předpokladu udělat menší než sebemenší kladné ε. A to je možné jenom tak, že $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$. □

Důsledek 5.1.16. *Nechť $-\infty < a \leq c < d \leq b < +\infty$. Je-li f integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, pak f je integrovatelná i v $\langle c, d\rangle$.*

Důkaz. Z existence $\int_a^b f$ plyne pro každé $\varepsilon > 0$ existence rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) < \varepsilon\,.$$

Definujme rozdělení $\sigma^* = \sigma \cup \{c, d\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a rozdělení $\sigma^{**} = \sigma^* \cap \langle c, d\rangle$ intervalu $\langle c, d\rangle$. Protože σ^* je zjemněním rozdělení σ a všechny částečné intervaly rozdělení σ^{**} jsou obsaženy v rozdělení σ^*, platí

$$S_{\langle c,d\rangle}(\sigma^{**}) - s_{\langle c,d\rangle}(\sigma^{**}) \leq S_{\langle a,b\rangle}(\sigma^*) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma^*) \leq S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) < \varepsilon\,.$$

Pro libovolné kladné ε se nám podařilo tedy najít takové rozdělení σ^{**} intervalu $\langle c, d\rangle$, že $S_{\langle c,d\rangle}(\sigma^{**}) - s_{\langle c,d\rangle}(\sigma^{**}) < \varepsilon$, což znamená splnění nutné i postačující podmínky pro existenci $\int_c^d f$. □

Důsledek 5.1.17. *Nechť $-\infty < a < c < b < +\infty$. Je-li f integrovatelná v $\langle a, c\rangle$ a v $\langle c, b\rangle$, pak f je integrovatelná i v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Pro důkaz existence $\int_a^b f$ využijeme větu 5.1.15. Pro libovolné kladné ε existují rozdělení $\sigma^{(1)}$ intervalu $\langle a, c\rangle$ a $\sigma^{(2)}$ intervalu $\langle c, b\rangle$ taková, že

$$S_{\langle a,c\rangle}(\sigma^{(1)}) - s_{\langle a,c\rangle}(\sigma^{(1)}) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad S_{\langle c,b\rangle}(\sigma^{(2)}) - s_{\langle c,b\rangle}(\sigma^{(2)}) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.1}$$

Položme $\sigma = \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)}$. Pro toto rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = S_{\langle a,c\rangle}(\sigma^{(1)}) + S_{\langle c,b\rangle}(\sigma^{(2)}) \quad \text{a} \quad s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = s_{\langle a,c\rangle}(\sigma^{(1)}) + s_{\langle c,b\rangle}(\sigma^{(2)})\,.$$

Kombinací těchto vztahů a nerovností 5.1 dostaneme

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) < \varepsilon \,.$$

Tím je splněna postačující podmínka pro existenci integrálu $\int_a^b f$.

$\square$

I když máme nutnou a postačující podmínku existence integrálu, její tvar není šikovný pro ověřování. Je však velice užitečný pro důkaz existence $\int_a^b f$ u funkcí spojitých nebo monotonních.

Věta 5.1.18. *Funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$ má v tomto intervalu integrál $\int_a^b f$.*

Důkaz. Podle Cantorovy věty je funkce spojitá na uzavřeném intervalu spojitá stejnoměrně, tj.

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in \langle a,b\rangle)(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \tilde{\varepsilon}) \,.$$

Uvažujme libovolné kladné ε a položme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(b-a)$. Ke kladnému δ, které získáme k $\tilde{\varepsilon}$ v definici stejnoměrné spojitosti, sestrojíme rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, aby jeho norma byla menší než δ. Protože funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu svého suprema i infima, existují pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ čísla $\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ taková, že $m_i = f(\xi_i)$ a $M_i = f(\eta_i)$. Tedy zřejmě $|\eta_i - \xi_i| \leq \Delta_i < \delta$. Proto

$$0 \leq S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \big(M_i - m_i\big)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\eta_i) - f(\xi_i)\big)\Delta_i < \tilde{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \tilde{\varepsilon}(b-a) = \varepsilon \,.$$

To už podle věty 5.1.15 znamená existenci $\int_a^b f$. $\square$

Věta 5.1.19. *Funkce f monotonní v intervalu $\langle a,b\rangle$ má v tomto intervalu integrál $\int_a^b f$.*

Důkaz. Opět ověříme, že je splněna nutná a postačující podmínka existence integrálu. Existenci integrálu pro konstantní funkce jsme již ukázali v příkladě 5.1.13. Proto předpokládejme bez újmy na obecnosti, že f je klesající funkce a že $f(a) > f(b)$. Ke kladnému ε zkonstruujme rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, aby jeho norma byla menší než $\delta := \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$. V následujícím odhadu využijeme toho, že funkce klesající v uzavřeném intervalu nabývá suprema M_i v levém a infima m_i v pravém kraji intervalu,

$$0 \leq S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\Big)\Delta_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\Big) = \delta\big(f(a) - f(b)\big) = \varepsilon \,.$$

Splnění této podmínky už implikuje existenci $\int_a^b f$. $\square$

Ukážeme na příkladě, že ani spojitost ani monotonie nejsou nutnou podmínkou pro existenci integrálu.

Příklad 5.1.20. Připomeňme definici Riemannovy funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro iracionální } x\,, \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \text{ nesoudělná celá, } q \geq 1\,. \end{cases}$$

Tato funkce je omezena shora číslem 1, zdola nulou. Je nespojitá v každém racionálním bodě $x \neq 0$ a spojitá v každém iracionálním bodě. Ukážeme, že integrál této "hodně" nespojité funkce existuje.[2] Počítáme $\int_0^1 f$. Protože $\inf f = 0$ na každém intervalu, je $s(\sigma) = 0$ pro každé rozdělení σ, a tedy $\underline{\int_0^1} f = 0$.

Pro nalezení horního integrálního součtu zvolme přirozené n a popišme body z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, ve kterých je funkční hodnota větší nebo rovna $\frac{1}{n}$. Kromě bodů 0 a 1, ve kterých je hodnota Riemannovy funkce rovna 1, jsou to zkrácené zlomky $\frac{p}{q}$, kde $0 < p < q \leq n$, protože $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geq \frac{1}{n}$. Takových zlomků není více než párů přirozených čísel splňujících $0 < p < q \leq n$. Těch je $\binom{n}{2}$. Uvažujme ekvidistantní rozdělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na n^3 částečných intervalků stejné délky $\Delta = \frac{1}{n^3}$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n^3} M_k \Delta = \sum_{k,\ kde\ M_k < \frac{1}{n}} M_k \Delta + \sum_{k,\ kde\ M_k \geq \frac{1}{n}} M_k \Delta \ \leq$$

$$\leq \ n^3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3} + \left(2 + \binom{n}{2}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} \ \leq \ \frac{2}{n}\,.$$

Z definice horního integrálního součtu plyne, že

$$\overline{\int_0^1} f \leq \inf \left\{ \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0\,.$$

Dolní i horní integrální součet má stejnou hodnotu 0. Proto $\int_0^1 f = 0$.

Na druhé straně funkce f, která je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, nemůže být všude nespojitá, jak dokládá následující věta.

---

[2] Riemannův původní příklad "hodně" nespojité funkce, která přesto má integrál, je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\langle xn \rangle}{n^2}\,,$$

kde $\langle x\rangle$ je funkce periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 1, přičemž klademe $\langle x\rangle := x$ pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $\langle \frac{1}{2}\rangle := 0$. Tímto příkladem se Riemann dostal daleko za Cauchyovy představy o tom, že je rozumné integrovat jenom funkce po částech spojité.

Věta 5.1.21. *Nechť funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f má v $\langle a,b\rangle$ nekonečně mnoho bodů spojitosti.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každý interval $\langle a,b\rangle$ a pro každou funkci f integrovatelnou na $\langle a,b\rangle$ platí, že v $\langle a,b\rangle$ existuje alespoň jeden bod spojitosti f. Tím bude věta dokázána, protože z existence $\int_a^b f$ plyne existence $\int_c^d f$ pro sebemenší interval $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, a v intervalu $\langle c,d\rangle$ tedy taky najdeme bod spojitosti funkce f.

Nechť existuje $\int_a^b f$. Zvolme libovolně $\varepsilon_1 > 0$. Z nutné a postačující podmínky pro existenci integrálu plyne, že existuje takové rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$, že

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i < \varepsilon_1(b-a).$$

A tedy alespoň na jednom částečném intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ je rozdíl $M_i - m_i$ suprema a infima menší než ε_1. Označme prostřední třetinu tohoto intervalu jako $\langle a_1,b_1\rangle$.
Protože existuje i $\int_{a_1}^{b_1} f$, úvahu opakujeme pro kladné ε_2 a interval $\langle a_1,b_1\rangle$. Zase najdeme rozdělení σ intervalu $\langle a_1,b_1\rangle$, kde

$$S_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) - s_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\big(M_i - m_i\big)\Delta_i < \varepsilon_2(b_1-a_1).$$

A tedy alespoň na jednom částečném intervalu je rozdíl $M_i - m_i$ suprema a infima menší než ε_2. Prostřední třetinu tohoto částečného intervalu označíme $\langle a_2,b_2\rangle$. Takto můžeme pokračovat dál.

Volíme-li kladná čísla ε_n tak, aby $\lim \varepsilon_n = 0$, dostáváme posloupnost do sebe vnořených intervalů $\langle a,b\rangle \supset \langle a_1,b_1\rangle \supset \langle a_2,b_2\rangle \supset \ldots$, přičemž rozdíl suprema a infima funkce f je na intervalu $\langle a_n,b_n\rangle$ menší než ε_n. Posloupnost levých krajů (a_n) těchto intervalů tvoří ostře rostoucí posloupnost a posloupnost pravých krajů (b_n) ostře klesající posloupnost, přičemž $a_n < b_n$ pro každé n. Proto

$$c := \lim_{n\to+\infty} a_n \in (a_n,b_n) \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

Teď ukážeme, že bod c je bodem spojitosti funkce f.

Nechť je dáno kladné ε. Najdeme n tak, aby $\varepsilon > \varepsilon_n$ a položíme $\delta := \min\{c-a_n, b_n-c\}$. Pak δ-okolí $(c-\delta,c+\delta) \subset (a_n,b_n)$, a proto pro každé x z tohoto okolí je rozdíl $f(x)-f(c)$ omezen rozdílem suprema a infima funkce f na intervalu (a_n,b_n). Ten je menší než $\varepsilon_n < \varepsilon$. To dokazuje spojitost f v bodě c. $\square$

Poznámka. Malou obměnou předchozího důkazu lze dokonce odvodit, že množina bodů spojitosti funkce f integrovatelné v $\langle a,b\rangle$ má mohutnost kontinua, tj. mohutnost $\mathbb{R}$.

5.2 Určitý integrál jako limita posloupnosti

Definice 5.2.1. Posloupnost $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme **normální**, když pro normy platí

$$\lim_{n\mapsto\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Příklad 5.2.2. V posloupnosti (σ_n) ekvidistantních rozdělení definovaných

$$\sigma_n = \{a, a+\Delta, a+2\Delta, \ldots, a+(n–1)\Delta, a+n\Delta = b\}\,, \quad \text{kde} \;\; \Delta = (b–a)/n,$$

je norma každého rozdělení $\nu(\sigma_n) = \frac{b-a}{n}$. Proto je to normální posloupnost rozdělení.

Příklad 5.2.3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme rozdělení σ_n intervalu $\langle a,b\rangle$ pomocí geometrické posloupnosti

$$\sigma_n = \{a, aq, aq^2, \ldots, aq^n = b\}, \quad \text{kde} \;\; q = \sqrt[n]{b/a}\,.$$

Pro normu každého rozdělení σ_n platí

$$\nu(\sigma_n) = \max_k \; a\Big((b/a)^{\frac{k}{n}} - (b/a)^{\frac{k-1}{n}}\Big) = \max_k \; a(b/a)^{\frac{k}{n}}\Big(1-(b/a)^{-\frac{1}{n}}\Big) = a\Big(1-(b/a)^{-\frac{1}{n}}\Big) \mapsto 0$$

a jedná se proto o normální posloupnost rozdělení.

Lemma 5.2.4. *Nechť f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak ke každému kladnému ε existuje kladné δ tak, že pro libovolné rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$ s normou $\nu(\sigma) < \delta$ platí*

$$\overline{\int_a^b} f \;\le\; S(\sigma) \;\le\; \overline{\int_a^b} f \;+\; \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \underline{\int_a^b} f \;-\; \varepsilon \;\le\; s(\sigma) \;\le\; \underline{\int_a^b} f\,.$$

Důkaz. Horní integrální součet je infimem množiny horních součtů, tedy z druhé vlastnosti infima plyne

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\sigma^*\big)\;\Big(\;\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > S(\sigma^*)\;\Big)\,.$$

Označme p počet dílčích intervalků rozdělení σ^*. Vezměme libovolné rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ s normou $\nu(\sigma) < \delta$. Toto δ bude specifikováno později. Definujme společné zjemnění $\sigma' = \sigma \cup \sigma^*$. Z lemmatu 5.1.8 víme, že $S(\sigma') \le S(\sigma^*)$ a $S(\sigma') \ge S(\sigma) - 2Kp\nu(\sigma)$, kde K je konstanta omezující absolutní hodnotu funkce f. Proto

$$0 \le S(\sigma) - \overline{\int_a^b} f = \underbrace{S(\sigma) - S(\sigma')}_{\le 2Kp\nu(\sigma)} + \underbrace{S(\sigma') - S(\sigma^*)}_{\le 0} + \underbrace{S(\sigma^*) - \overline{\int_a^b} f}_{<\varepsilon/2}\,.$$

Když položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{4Kp}$, je pravá strana předchozí nerovnosti $< \varepsilon$, což jsme měli dokázat. Důkaz pro dolní součty je obdobný. $\square$

Věta 5.2.5. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je libovolná normální posloupnost rozdělení. Pak*

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{n\mapsto+\infty} S(\sigma_n) \quad a \quad \underline{\int_a^b} f = \lim_{n\mapsto+\infty} s(\sigma_n)\,.$$

Důkaz. To, že posloupnost (σ_n) je normální, znamená

$$(\forall\delta>0)(\exists n_0)(\forall n>n_0)\big(\nu(\sigma_n)<\delta\big)\,.$$

Z předchozího lemmatu o horním a dolním integrálním součtu plyne

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\big(\forall\sigma,\nu(\sigma)<\delta\big)\Big(\overline{\int_a^b} f \le S(\sigma) \le \overline{\int_a^b} f+\varepsilon\Big)\,.$$

Kombinací obou výroků již dostaneme

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)(\exists n_0)(\forall n>n_0)\Big(\overline{\int_a^b} f \le S(\sigma_n) \le \overline{\int_a^b} f+\varepsilon\Big) \quad\Longrightarrow\quad \overline{\int_a^b} f = \lim_{n\mapsto+\infty} S(\sigma_n)\,.$$

Druhá část věty o dolním integrálním součtu se dokazuje obdobně. □

Příklad 5.2.6. Vypočítejme $\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$ pomocí předchozí věty.
Zvolíme normální ekvidistantní posloupnost rozdělení $\sigma_n = \big\{a+i\frac{b-a}{n} \mid i=0,1,\dots,n\big\}$.
Protože funkce e^x je rostoucí, nabývá infima m_i a suprema M_i na krajích částečných intervalů. Proto

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n e^{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}\,\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\,e^a \sum_{i=1}^n \Big(e^{\frac{b-a}{n}}\Big)^{i-1} = \frac{b-a}{n}\,e^a\,\frac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}\,.$$

Jelikož $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1,$ je

$$\lim_{n\mapsto+\infty} s(\sigma_n) = e^b-e^a.$$

Horní součty lze vyjádřit pomocí dolních součtů,

$$S(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n e^{a+i\frac{b-a}{n}}\,\frac{b-a}{n} = e^{\frac{b-a}{n}}\,s(\sigma_n).$$

Souhrnně dostaneme

$$\overline{\int_a^b} e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto+\infty} S(\sigma_n) = \lim_{n\mapsto+\infty} s(\sigma_n) = e^b-e^a = \underline{\int_a^b} e^x\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 5.2.7. Určíme $\int_a^b x^p\,\mathrm{d}x$ pro $0<a<b$ a parametr $p\in\mathbb{R},\ p>0$.
Opět se jedná o funkci monotonní na $\langle a,b\rangle$. Suprema i infima bude funkce na částečných intervalech rozdělení nabývat v krajních bodech. Kdybychom použili ekvidistantní rozdě-

lení z předchozího příkladu, museli bychom umět sečíst sumu

$$S(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(a + i\frac{b-a}{n} \right)^p \, \frac{b-a}{n} \, .$$

Takovou sumu sečíst neumíme. Můžeme však použít jinou normální posloupnost rozdělení. Použijeme "geometrickou"posloupnost z příkladu 5.2.3. Teď horní součet má $S(\sigma_n)$ tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}} \right)^p a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} \right) = a^{p+1} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} \right)^i =$$

$$= a^{p+1} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} \right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} - 1} = \left(b^{p+1} - a^{p+1}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{n}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} - 1} \, .$$

Využijeme toho, že

$$\lim_{n \mapsto +\infty} (b/a)^{\frac{p}{n}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \mapsto 1} \frac{x-1}{x^{p+1}-1} = \frac{1}{p+1}$$

a dostaneme

$$\int_a^{\overline{b}} x^p \, \mathrm{d}x = \lim_{n \mapsto +\infty} S(\sigma_n) = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \, .$$

Pro dolní a horní součty platí vztah

$$s(\sigma_n) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{n}} S(\sigma_n) \, .$$

Proto horní a dolní integrální součty jsou stejné a integrál $\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x$ existuje,

$$\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \, .$$

Poznámka. Změna hodnoty funkce v konečném počtu bodů nezmění hodnotu horního ani dolního integrálního součtu. Stačí dokázat případ, kdy změníme funkci v jednom bodě. Když f a g jsou funkce omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle - \{c\}$, pak pro libovolnou normální posloupnost rozdělení (σ_n) je

$$|S_f(\sigma_n) - S_g(\sigma_n)| \le \nu(\sigma_n). \left(\sup_{\langle a,b\rangle} f - \inf_{\langle a,b\rangle} g \right) \mapsto 0 \, .$$

Proto je $\lim S_f(\sigma_n) = \lim S_g(\sigma_n)$.

Doposud jsme vyjádřili $\int_{\underline{a}}^b f$ a $\int_a^{\overline{b}} f$ jako limitu. Teď vyjádříme $\int_a^b f$ jako limitu. Zavedeme nejdříve základní pojem - integrální součet.

Definice 5.2.8. Nechť f je funkce omezená na $\langle a,b\rangle$ a nechť $\sigma=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, kde $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, je rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Sumu

$$\mathcal{J}(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i,\quad \text{kde } \xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle \text{ pro každé } i\in\{1,2,\dots,n\}\,,$$

nazýváme **integrálním součtem** funkce f při rozdělení σ.

Poznámka. 1) I když to formálně nevyznačujeme, integrální součet $\mathcal{J}(\sigma)$ závisí nejenom na σ, ale také na volbě jednotlivých bodů ξ_i.
2) Pro každé rozdělení σ platí

$$s(\sigma)\le\mathcal{J}(\sigma)\le S(\sigma).$$

Věta 5.2.9. (základní věta integrálního počtu)[3] *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Integrál $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když pro každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost $\big(\mathcal{J}(\sigma_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentní.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Předpokládejme, že $\int_a^b f$ existuje. V tomto případě pro normální posloupnost rozdělení z věty 5.2.5 je $\lim S(\sigma_n)=\lim s(\sigma_n)=\int_a^b f$. Protože $s(\sigma_n)\le\mathcal{J}(\sigma_n)\le S(\sigma_n)$ pro každý integrální součet σ_n, plyne tvrzení z věty o limitě sevřené posloupnosti.

$(\Leftarrow)$ Nejdříve ukážeme, že když každá posloupnost $\big(\mathcal{J}(\sigma_n)\big)$ je konvergentní, tak všechny posloupnosti $\big(\mathcal{J}(\sigma_n)\big)$ mají stejnou limitu. Ukážeme to sporem.

Předpokládejme, že existují dvě normální posloupnosti rozdělení $\big(\sigma_n^{(1)}\big)$ a $\big(\sigma_n^{(2)}\big)$ takové, že $\lim\mathcal{J}\big(\sigma_n^{(1)}\big)\ne\lim\mathcal{J}\big(\sigma_n^{(2)}\big)$. Pak posloupnost rozdělení $(\tilde\sigma_n)$ definovaná předpisem $\tilde\sigma_{2n}=\sigma_n^{(1)}$ a $\tilde\sigma_{2n-1}=\sigma_n^{(2)}$ je opět normální, a přitom $\lim\mathcal{J}\big(\tilde\sigma_n\big)$ neexistuje, neboť vybrané podposloupnosti sudých a lichých členů mají různé limity - spor.

Uvažujme normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a označme body n-tého rozdělení $\sigma_n=\{x_0^{(n)},x_1^{(n)},\dots,x_{k_n}^{(n)}\}$. Infimum, respektive supremum, funkce f na částečném intervalu $\langle x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\rangle$ značíme $m_i^{(n)}$, respektive $M_i^{(n)}$. Z vlastnosti suprema a infima plyne, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ a pro každé $i=1,2,\dots,k_n$ existují body $\xi_i^{(n)},\eta_i^{(n)}\in\langle x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\rangle$ takové, že

$$m_i^{(n)}\le f(\xi_i^{(n)})<m_i^{(n)}+\frac{1}{n}\qquad\text{a}\qquad M_i^{(n)}-\frac{1}{n}<f(\eta_i^{(n)})\le M_i^{(n)}\,.$$

Vynásobením nerovností kladným číslem $\Delta_i^{(n)}:=x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}$ a sečtením těchto nerovností pro $i=1,2,\dots,k_n$ dostaneme

$$s(\sigma_n)\ \le\ \mathcal{J}^{(1)}(\sigma_n):=\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta_i^{(n)}\ <\ s(\sigma_n)+\frac{b-a}{n}\,,$$

[3] Původní Cauchyova-Riemannova definice integrálu je založena na integrálních součtech. Definice určitého integrálu pomocí horních a dolních integrálních součtů, jak jsme ji uvedli my, pochází od Gastona Darbouxe (1842-1917). Tato věta tedy ukazuje ekvivalenci obou definic.

respektive

$$S(\sigma_n) - \frac{b-a}{n} \; < \; \mathcal{J}^{(2)}(\sigma_n) := \sum_{i=1}^{k_n} f(\eta_i^{(n)})\Delta_i^{(n)} \; \leq \; S(\sigma_n)\,.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti a z toho, že $\lim S(\sigma_n)$ a $\lim s(\sigma_n)$ existují a rovnají se hornímu, respektive dolnímu, integrálnímu součtu, dostaneme

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{J}^{(1)}(\sigma_n) \quad \text{a} \quad \int_{a}^{\underline{b}} f = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{J}^{(2)}(\sigma_n)\,.$$

Jak jsme už dokázali $\lim \mathcal{J}^{(1)}(\sigma_n) = \lim \mathcal{J}^{(2)}(\sigma_n)$, což znamená rovnost horního a dolního integrálního součtu, a tedy existenci $\int_a^b f$. $\square$

Poznámka. Z důkazu věty plyne, že v případě existence $\int_a^b f$ je toto číslo limitou integrálních součtů $\mathcal{J}(\sigma_n)$ pro libovolnou normální posloupnost rozdělení.

5.3 Vlastnosti určitého integrálu

Začneme tuto kapitolu doplňkem k definici určitého integrálu. Z technických důvodů je výhodné, když nemusíme hlídat, zda horní mez v určitém integrálu je skutečně větší než dolní.

Definice 5.3.1. 1) Nechť funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak definujeme $\int_b^a f := -\int_a^b f$ a říkáme, že f má integrál od b do a.
2) Nechť $a \in D_f$. Pak definujeme $\int_a^a f := 0$ a říkáme, že f má integrál od a do a.

Ukážeme, že přiřazení určitého integrálu k funkci, tj. $f \mapsto \int_a^b f$, je lineárním funkcionálem na prostoru funkcí integrovatelných v $\langle a, b\rangle$.

Věta 5.3.2. (linearita určitého integrálu) *Nechť $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f a g mají integrál od a do b. Pak funkce αf a $f+g$ mají integrál od a do b a platí*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f \qquad a \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

Důkaz. Nejdříve uvažujme situaci, kdy $a < b$. Je-li (σ_n) normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tak pro integrální součet funkcí αf a $f+g$ platí

$$\mathcal{J}_{\alpha f}(\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f)(\xi_k)\Delta_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k = \alpha \mathcal{J}_f(\sigma_n)\,, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{J}_{f+g}(\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} (f+g)(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta_k = \mathcal{J}_f(\sigma_n) + \mathcal{J}_g(\sigma_n)\,. \tag{5.3}$$

Předpokládali jsme existenci $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$. Proto ze základní věty integrálního počtu plyne, že posloupnosti $\big(\mathcal{J}_f(\sigma_n)\big)$ a $\big(\mathcal{J}_g(\sigma_n)\big)$ jsou konvergentní pro každou volbu normální posloupnosti rozdělení. Jelikož součet dvou konvergentních posloupností a reálný násobek konvergentní posloupnosti jsou opět konvergentními posloupnostmi, jsou taky $\mathcal{J}_{\alpha f}(\sigma_n)$ a $\mathcal{J}_{f+g}(\sigma_n)$ konvergentní pro každou volbu (σ_n). Tedy zase podle základní věty integrálního počtu existují $\int_a^b(\alpha f)$ a $\int_a^b(f+g)$. Limitním přechodem v (5.2) a (5.3) pro $n \mapsto +\infty$ pak už dostaneme požadované rovnosti mezi integrály.

Nechť $b < a$. Pak $\int_a^b f = -\int_b^a f$ a $\int_a^b g = -\int_b^a g$. Z dokázaného platí, že existují $\int_b^a(\alpha f)$ a $\int_b^a(f+g)$. Proto existují i $\int_a^b(\alpha f)$ a $\int_a^b(f+g)$ a platí

$$\int_a^b(\alpha f) = -\int_b^a(\alpha f) = -\alpha\int_b^a f = \alpha\int_a^b f\,,$$

$$\int_a^b(f+g) = -\int_b^a(f+g) = -\int_b^a f - \int_b^a g = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

V případě $a = b$ věta pouze tvrdí $0 = \alpha.0$ a $0 = 0 + 0$. □

Poznámka. Z existence $\int_a^b(f+g)$ neplyne existence $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$. Stačí uvažovat Dirichletovu funkci f a položit $g = -f$.

Vlastnost určitého integrálu popsanou další větou lze výstižně nazvat **aditivita integrálu v mezích**.

Věta 5.3.3. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a nechť existují alespoň dva z integrálů $\int_a^b f$, $\int_a^c f$ a $\int_c^b f$. Pak existuje i třetí integrál a platí* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že a, b a c jsou tři různé body. Existenci třetího integrálu, když existují dva z integrálů $\int_a^b f$, $\int_a^c f$ a $\int_c^b f$, zaručují důsledky 5.1.16 a 5.1.17 Stačí tedy dokázat rovnost.

1) Nejdříve diskutujme případ $a < c < b$.

Nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c \in \sigma_n$. Položme $\sigma_n^{(1)} = \sigma_n \cap \langle a, c\rangle$ a $\sigma_n^{(2)} = \sigma_n \cap \langle c, b\rangle$. Takto definované $(\sigma_n^{(1)})$ a $(\sigma_n^{(2)})$ jsou normálními posloupnostmi rozdělení intervalů $\langle a, c\rangle$, resp. $\langle c, b\rangle$. Pro integrální součty platí zřejmý vztah

$$\mathcal{J}_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) = \mathcal{J}_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) + \mathcal{J}_{\langle c,b\rangle}(\sigma_n^{(2)})\,. \tag{5.4}$$

Z existence integrálů $\int_a^c f$ a $\int_c^b f$ podle základní věty integrálního počtu plyne

$$\mathcal{J}_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \int_a^b f\,, \quad \mathcal{J}_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \int_a^c f \quad \text{a} \quad \mathcal{J}_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(2)}) \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \int_c^b f\,.$$

To spolu s (5.4) dokazuje větu.

2) Diskutujme případ $a < b < c$.
Podle bodu 1) platí rovnost $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Proto $\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$, jak jsme měli ukázat. Ostatní případy ostrých nerovností mezi čísly a, b, c mají analogický důkaz.

Když mezi čísly a, b, c nastane alespoň jedna rovnost, je věta přímým důsledkem toho, že integrál se stejnou horní a dolní mezí klademe roven 0.

□

Poznámka. Nechť f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ **konečný počet skoků**, řekněme $c_1, c_2, \ldots, c_k$, kde $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leq b$. Integrál $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f$ existuje, protože změnou funkční hodnoty f nanejvýš v bodech c_{i-1} a c_i lze získat funkci spojitou, a tedy integrovatelnou na $\langle c_{i-1}, c_i\rangle$. Změna funkční hodnoty funkce ve dvou bodech neovlivní ani existenci ani hodnotu integrálu. Stejná úvaha platí i pro integrály $\int_a^{c_1} f$ a $\int_{c_k}^b f$. Využijeme opakovaně aditivity integrálu v mezích a dostaneme, že **existuje integrál** $\int_a^b f$ a platí

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^{c_1} f \;+ \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \;+ \ldots + \int_{c_k}^b f\,.$$

Věta 5.3.4. (o nerovnostech v integrálu) *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

- *Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f \;\leq\; \int_a^b g$.*
- *Je-li $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f \;<\; \int_a^b g$.*

Důkaz. 1) Uvažujme funkci h integrovatelnou a nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro její infimum m na tomto intervalu platí $m \geq 0$. Protože pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ je dolní součet $s(\sigma) \geq m(b-a) \geq 0$, je nutně i $\int_a^b h = \sup_\sigma s(\sigma) \geq 0$.
Z předpokladů věty a z linearity integrálu plyne, že funkce $h := g - f$ je integrovatelná a nezáporná. Proto $0 \leq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$.

2) Stejně jako v předchozí části bude tvrzení věty zřejmé, pokud ukážeme, že funkce h, kladná a integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, má kladný integrál. Zvolme $x_0 \in (a, b)$, který je bodem spojitosti funkce h. To lze, protože integrovatelná funkce má dokonce nekonečně mnoho bodů spojitosti, viz 5.1.21. Kladnost $h(x_0)$ a spojitost implikují existenci okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, na kterém je $h(x) \geq \frac{h(x_0)}{2}$. Z bodu 1) plyne

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h \;\geq\; \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2} \;= h(x_0)\delta \;> 0\,.$$

Z aditivity integrálu v mezích a bodu 1) dostaneme

$$\int_a^b h = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} h}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h}_{>0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} h}_{\geq 0} > 0.$$

$\square$

Věta 5.3.5. *Nechť f je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$. Pak $|f|$ je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f| \,.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro každou funkci omezenou na $\langle c,d\rangle$ platí

$$\sup_{\langle c,d\rangle} |f| - \inf_{\langle c,d\rangle} |f| \leq \sup_{\langle c,d\rangle} f - \inf_{\langle c,d\rangle} f \;. \tag{5.5}$$

Důkaz této nerovnosti je jednoduchý pro funkci nezápornou na celém $\langle c,d\rangle$. Tam je totiž $\sup|f| = \sup f$ a $\inf|f| = \inf f$, a proto jde v (5.5) o rovnost. Pro funkci nekladnou na celém $\langle c,d\rangle$, je $\sup|f| = -\inf f$ a $\inf|f| = -\sup f$, a také v (5.5) platí rovnost. Zbývá diskutovat funkci f, která na $\langle c,d\rangle$ nabývá jak kladných tak záporných hodnot. Pro následující odhad využijeme toho, že $\inf|f| \geq 0$, $-\inf f > 0$ a toho, že maximum ze dvou kladných čísel je menší než jejich součet:

$$\sup_{\langle c,d\rangle} |f| - \inf_{\langle c,d\rangle} |f| \leq \sup_{\langle c,d\rangle} |f| = \max\{\sup_{\langle c,d\rangle} f \,, -\inf_{\langle c,d\rangle} f\} \leq \sup_{\langle c,d\rangle} f - \inf_{\langle c,d\rangle} f \,.$$

Právě dokázaná nerovnost (5.5) implikuje pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$

$$S_{|f|}(\sigma) - s_{|f|}(\sigma) \leq S_f(\sigma) - s_f(\sigma)\,. \tag{5.6}$$

Existenci $\int_a^b f$ lze ekvivalentně přepsat

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \sigma\big)\Big(S_f(\sigma) - s_f(\sigma) < \varepsilon\Big).$$

To spolu s (5.6) znamená, že funkce $|f|$ splňuje na $\langle a,b\rangle$ nutnou a postačující podmínku pro existenci integrálu. Proto $\int_a^b |f|$ existuje.

Nerovnosti $|f| \geq f$ a $|f| \geq -f$ implikují podle věty o nerovnostech v integrálech, že $\int_a^b |f| \geq \int_a^b f$ a $\int_a^b |f| \geq -\int_a^b f$. To dává $\int_a^b |f| \geq \left|\int_a^b f\right|$. $\square$

Věta 5.3.6. (integrál jako funkce horní meze) *Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak funkce $F : \langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ definovaná předpisem $F(x) = \int_a^x f$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Je-li navíc funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$, je funkce F diferencovatelná v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz. Funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$, existuje tedy K tak, že $|f(x)| \le K$ pro každé x. Pro odhad rozdílu $F(x)-F(x_0)$ využijeme aditivity v mezích integrálu

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f|\right| \le \left|\int_{x_0}^x K\right| \le K|x-x_0|\,.$$

Když pro dané kladné ε položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, bude pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platit

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |F(x)-F(x_0)| < \varepsilon\,.$$

To znamená, že F je spojitá v bodě x_0, jak jsme měli ukázat.

Pro důkaz další části tvrzení předpokládáme, že bod $x_0 \in \langle a,b\rangle$ je bodem spojitosti funkce f. To lze ekvivalentně přepsat

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t\in\langle a,b\,\rangle)\big(\ |t-x_0|<\delta \quad\Rightarrow\quad f(x_0)-\varepsilon < f(t) < f(x_0)+\varepsilon\ \big)\,.$$

Uvažujme x takové, že $x_0 < x < x_0+\delta$. Z věty o nerovnostech v integrálech získáme horní odhad

$$F(x)-F(x_0) \ = \int_{x_0}^x f \ < \ \int_{x_0}^x \big(f(x_0)+\varepsilon\big) = \big(f(x_0)+\varepsilon\big)\cdot(x-x_0)$$

a odhad z druhé strany

$$F(x)-F(x_0) \ = \int_{x_0}^x f \ > \int_{x_0}^x \big(f(x_0)-\varepsilon\big) = \big(f(x_0)-\varepsilon\big)\cdot(x-x_0)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$-\varepsilon < \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) < \varepsilon$$

Pro x z levého δ-okolí bodu x_0 dostaneme stejný odhad. Celkově

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\big(\forall x\in\langle a,b\,\rangle, 0<|x-x_0|<\delta\big)\left(\ \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon\right)\,,$$

a to je definice faktu

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)\,,$$

jak jsme chtěli ukázat. □

Protože $\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f$, obdobné tvrzení lze samožřejmě dokázat i pro funkci s pohyblivou dolní mezí v integrálu. Symbolicky lze psát

$$\left(\int_a^x f\right)' = f(x) \quad \text{a} \quad \left(\int_x^b f\right)' = -f(x)\,. \tag{5.7}$$

Příklad 5.3.7. Vypočtěme limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Protože v čitateli i jmenovateli jsou diferencovatelné funkce a jmenovatel má limitu $+\infty$, můžeme zkusit použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t \, \mathrm{d}t\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Tedy výsledek je $\frac{\pi^2}{4}$ a nemuseli jsme vůbec hledat explicitní tvar funkce $\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t \, \mathrm{d}t$.

Nyní můžeme dokázat, jak jsme to slíbili v kapitole Primitivní funkce, větu o existenci primitivní funkce k funkci spojité.

Důsledek 5.3.8. *Funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b) má v tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz. Zvolme libovolně ale pevně $c \in (a, b)$. Spojitost funkce f implikuje existenci určitého integrálu od c do x pro každé $x \in (a, b)$. Proto lze položit $F(x) := \int_c^x f$. Podle předchozí věty je $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a, b)$. □

5.4 Výpočet určitého integrálu

Nyní už máme k dispozici dostatečný aparát, abychom dali do souvislosti určitý a neurčitý integrál. Newtonova formule využívá znalosti primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu. Další metody pro výpočet určitého integrálu - per partes a substituční - jsou jenom důsledkem této formule a metody per partes a substituční metody pro primitivní funkce.

Věta 5.4.1. (Newtonova formule) *Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že*

1) F je spojitá na $\langle a, b\rangle$;

2) $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f \;=\; F(b) - F(a) \;\stackrel{ozn.}{=}\; [F(x)]_a^b.$$

Důkaz. Uvažujme normální posloupnost rozdělení (σ_n) s členy $\sigma_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$, kde $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b$. Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce

F na intervalech $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, k_n$, dostaneme

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k_n} \big(F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}) \big) = \sum_{i=1}^{k_n} F'(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)} = \mathcal{J}(\sigma_n).$$

Po limitním přechodu při $n \to +\infty$ dostaneme $\lim \mathcal{J}(\sigma_n) = F(b) - F(a)$. Základní věta integrálního počtu říká, že z předpokladu existence integrálu plyne $\int_a^b f = \lim \mathcal{J}(\sigma_n)$. Proto $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. $\square$

Poznámka. Předpoklad existence $\int_a^b f$ v Newtonově formuli je důležitý. V roce 1881 V. Volterra[4] sestrojil příklad funkce F spojité na $\langle a, b \rangle$, která má omezenou derivaci F', ale F' není funkce integrovatelná na $\langle a, b \rangle$. Neuvedeme žádný příklad takovéto funkce, protože pro všechny známé funkce s touto vlastností je důkaz neexistence integrálu zdlouhavý.

Poznámka. 1) Funkce F, jejíž existence se předpokládá ve větě, je primitivní funkcí k funkci f na (a, b), ale navíc musí být F spojitá na $\langle a, b \rangle$.

2) Předpoklady kladené na F lze zeslabit. Požadavek spojitosti funkce F na $\langle a, b \rangle$ musí zůstat zachován, ale stačí, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ až na konečný počet výjimek. Aditivita integrálu v mezích a původní Newtonova formule totiž umožňuje přepsat

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_k}^b f =$$

$$= F(c_1) - F(a) + F(c_2) - F(c_1) + \ldots + F(b) - F(c_k) = F(b) - F(a),$$

kde $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ jsou body, ve kterých neplatí $F'(x) = f(x)$.

Příklad 5.4.2. Vypočítejme $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$ pomocí Newtonovy formule.

Nejdříve nalezneme primitivní funkci

$$\int \frac{1}{1 + \cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\; \frac{1}{2 + \mathrm{tg}^2 x}\, \mathrm{d}x =$$

a po substituci $\mathrm{tg}\, x = t$ pokračujeme

$$= \int \frac{1}{2 + t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{tg}\ x}{\sqrt{2}} =: F(x)\,.$$

Funkce F je primitivní funkcí na intervalu $(0, \pi/2)$, ale aby F byla spojitá na $\langle 0, \pi/2 \rangle$,

[4] Vitto Volterra (1860 - 1940), italský matematik, proslavil se výsledky v oblasti integrálních rovnic

musíme dodefinovat

$$F(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2_-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Z Newtonovy formule dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; F(\pi/2) - F(0) \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Počítejme určitý integrál ze stejné funkce ale v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Primitivní funkci počítáme stejně. Zapomeneme-li na požadavek spojitosti a jenom formálně dosadíme horní a dolní mez, dostaneme $F(\pi) - F(0) = 0$, což je nemožné pro integrál z kladné funkce.

Příklad 5.4.3. Vypočtěme v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}, p > 0$, limitu

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}\,.$$

Pokud p není přirozené číslo, neumíme součet v čitateli vyjádřit explicitně. Celý zlomek přepsaný do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}$$

však lze interpretovat jako integrální součet funkce $f(x) = x^p$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ při ekvidistantním rozdělení $\sigma_n = \{\frac{k}{n} \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$, ve kterém je $\Delta_k = \frac{1}{n}$. Jelikž (σ_n) je normální posloupnost rozdělení, dostaneme ze základní věty integrálního počtu a Newtonovy formule

$$L = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{J}_f(\sigma_n) = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}\,.$$

Věta 5.4.4. (metoda per partes pro určitý integrál) *Nechť funkce f a g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a diferencovatelné v (a, b). Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz. Předpoklady věty zaručují, že funkce fg je primitivní funkcí k funkci $f'g + fg'$ v intervalu (a, b) a fg je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Proto z Newtonovy formule $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$. Linearita integrálu už dokazuje větu. $\square$

Příklad 5.4.5.

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^2+1}{2}\,\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Poznámka. Větu lze vyslovit i v jednodušším tvaru, kdy se požaduje spojitost všech funkcí, a ta už implikuje existenci obou integrálů:

Když funkce f, g, f' a g' jsou spojité na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Tato věta má však omezené použití. Např. na výpočet integrálu

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ \mathrm{d}x$$

při volbě $f(x) = x$ a $g(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ jí nelze použít, jelikož funkce $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$ je neomezená na $(0,3)$, a tedy funkci g' nelze udělat spojitou na $\langle 0,3\rangle$.

Věta 5.4.6. (substituce v určitém integrálu) *Nechť pro funkce f a ϕ platí*

1) *ϕ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a diferencovatelná v (α,β);*
2) *f je spojitá na $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$.*

Pak

$$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big).\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x\ ,$$

pokud integrál nalevo existuje.

Důkaz. Funkce ϕ je spojitá, proto $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$ je uzavřený interval. Zvolme libovolně bod $c \in \phi\langle\alpha,\beta\rangle$ a položme $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in \phi\langle\alpha,\beta\rangle$. Tato funkce F je spojitá a diferencovatelná na $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$. Proto složená funkce $F\big(\phi(t)\big)$ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a má derivaci $f\big(\phi(t)\big).\phi'(t)$ v intervalu (α,β). Z Newtonovy formule plyne

$$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big).\phi'(t)\ \mathrm{d}t\ =\ \big[F(\phi(t))\big]_\alpha^\beta = F\big(\phi(\beta)\big) - F\big(\phi(\alpha)\big) = \int_c^{\phi(\beta)} f - \int_c^{\phi(\alpha)} f = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f$$

Při úpravách jsme použili aditivity integrálu v mezích. □

Příklad 5.4.7. Pro výpočet následujícího integrálu použijeme nejdříve substituci $x = \cos t$ pro $t \in \langle 0,\pi/2\rangle$ a posléze substituci $t = \pi/2 - y$ pro $y \in \langle 0,\pi/2\rangle$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ =\ \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\ \mathrm{d}t\ =\ -\int_{\pi/2}^0 \sin^2(\pi/2-y)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\ \mathrm{d}y\ =$$

$$=\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \big(\sin^2 y + \cos^2 y\big)\ \mathrm{d}y\ = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\ \mathrm{d}y\ =\ \frac{\pi}{4}\ .$$

Tuto kapitolu uzavřeme využitím Newtonovy formule pro odvození dalšího tvaru zbytku při aproximaci funkce polynomem.

Věta 5.4.8. (integrální tvar zbytku) *Nechť pro nezáporné celé číslo n, funkci f a bod a platí, že existuje okolí H_a, na kterém má funkce f spojitou $(n+1)$-ní derivaci. Pak n-tý zbytek $R_n(x)$ v Taylorově vzorci je pro každé $x \in H_a$ roven*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí na n.

• Nejdříve uvažujme $n = 0$. Když má funkce f na jistém okolí bodu a spojitou první derivaci, Newtonova formule říká, že

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Jelikož je 0-tý Taylorův polynom $T_0(x) = f(a)$, dává předchozí vztah rovnost pro zbytek

$$R_0(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

jak jsme měli ukázat.

• Pro indukční krok předpokádejme, že funkce f má spojitou $(n+2)$-hou derivaci na okolí H_a. To implikuje, že také $(n+1)$-ní derivace je spojitá. Z indukčního předpokladu a metody per partes dostaneme $R_n(x) =$

$$= \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left(\left[\underbrace{-\tfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1}}_{u(t)}\;\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\right]_a^x + \int_a^x \tfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Odtud pak

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že z definice Taylorova polynomu a zbytku v Taylorově vzorci plyne

$$R_n(x) = T_{n+1}(x) - T_n(x) + R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x)\,.$$

Srovnáním obou vyjádření pro zbytek $R_n(x)$ už snadno odvodíme

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

jak vyžaduje indukční krok. Tím je věta dokázána. □

5.5 Věty o střední hodnotě integrálu

V případě, že neumíme najít primitivní funkci k funkci f, musíme se při výpočtu integrálu $\int_a^b f$ obrátit k nějaké numerické metodě. Často však v aplikacích není nutné znát přesnou hodnotu integrálu a postačuje "rozumný" odhad.

Příklad 5.5.1. K funkci e^{-x^2} neumíme najít primitivní funkci v elementárním tvaru. Pomocí věty o nerovnostech v integrálu dostaneme pro hodnotu $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ odhad:

- $0 \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \ \leq 1$
- $\frac{1}{e} = \min\{e^{-x^2} |\ x \in \langle 0,1\rangle\} \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \ \leq 1$
- $e^{-x} \leq e^{-x^2}$ pro $x \in \langle 0,1\rangle \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \ \leq 1$

Příklad 5.5.2. Uvažujme $a > 0$ a odhadněme integrál $\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\right|$.

$$-\frac{1}{x} \ \leq \ \frac{\sin x}{x} \ \leq \ \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad -\int_a^{2a} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \ \leq \ \int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x \ \leq \ \int_a^{2a} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\,.$$

A tedy

$$\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\right| \ \leq \ \ln 2\ .$$

Obecnější návod na odhadování hodnot integrálů nám dají věty o střední hodnotě integrálu.

Věta 5.5.3. (o střední hodnotě I) *Nechť funkce f a g omezené na intervalu $\langle a,b\rangle$ mají tyto vlastnosti: funkce f je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a součin fg je integrovatelný na $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\textit{existuje} \quad \mu \in \langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g\rangle \quad \textit{takové, že} \qquad \int_a^b fg = \mu \int_a^b f\,.$$

Důkaz. Označme m infimum a M supremum funkce g na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak z platnosti nerovnosti $m \leq g(x) \leq M$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ a z toho, že $f(x) \geq 0$ dostaneme

$$mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x) \quad \Rightarrow \quad m\int_a^b f \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b f\,. \tag{5.8}$$

Z platnosti poslední nerovnosti plyne, že je-li $\int_a^b f = 0$, pak $\int_a^b fg = 0$, a v tomto případě lze zvolit μ libovolně. Stačí proto uvažovat případ $\int_a^b f \neq 0$, což spolu s nezáporností f dává $\int_a^b f > 0$.

Položme $\mu = \int_a^b fg / \int_a^b f$. Pak (5.8) po vydělení kladným číslem $\int_a^b f$ dává nerovnost $\mu \in \langle m, M\rangle$, jak tvrdí věta. □

Poznámka. 1) Přidáme-li k předpokladům věty ještě spojitost g, pak tvrzení lze vyslovit ve tvaru: Existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ takové, že

$$\int_a^b fg = g(\xi)\int_a^b f. \tag{5.9}$$

2) Při volbě funkce $f(x) = 1$ pro každe $x \in \langle a,b\rangle$ věta říká: $\int_a^b g = \mu(b-a)$. Číslo μ se nazývá střední hodnota funkce g. Číslo μ vystihuje jakou výšku by měl mít obdélník nad intervalem $\langle a,b\rangle$, aby jeho plocha byla stejná, jako plocha mezi osou x a grafem kladné funkce g.
3) Předchozí věta platí i v případě, kdy předpoklad nezápornosti funkce f je nahrazen její nekladností.

Věta 5.5.4. (o střední hodnotě II) *Nechť funkce f a fg jsou integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť g je monotonní v $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\textit{existuje } \xi \in \langle a,b\rangle \textit{ tak, že } \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f\,.$$

Důkaz. 1) Nejdříve dokážeme speciální případ, kdy funkce g je klesající a $g(b) = 0$. Za těchto dodatečných podmínek máme najít $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že $\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f$.
Když $g(a) = 0$, pak nutně $g(x) = 0$ na celém intervalu a tvrzení platí automaticky. Proto předpokládejme $g(a) > 0$.
Definujme

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Funkce F je spojitá na $\langle a,b\rangle$, a proto nabývá maxima a minima. Označme

$$m = \min_{\langle a,b\rangle} F \quad \text{a} \quad M = \max_{\langle a,b\rangle} F\,.$$

Uvažujme dále rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$, $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, pro jehož body $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ platí $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Připomeňme Abelovu sumaci, kterou použijeme na sumu

$$G(\sigma) := \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Abelova sumace Nechť $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jsou libovolné posloupnosti. Položme $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$ pro $k = 0, 1, \ldots$, tedy speciálně $B_0 = 0$. Pak

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i\big(B_i - B_{i-1}\big) = \sum_{i=1}^n a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1}\big(a_{i+1} - a_i\big)B_i\,.$$

Pro úpravu $G(\sigma)$ uvažujeme $a_i = g(x_{i-1})$ a $b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$, a tedy $B_i = \int_a^{x_i} f$. Dostaneme

$$G(\sigma) = \underbrace{g(x_{n-1})}_{\geq 0}.F(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\big(-g(x_i) + g(x_{i-1})\big)}_{\geq 0} F(x_i).$$

Proto

$$G(\sigma) \le Mg(x_{n-1}) + M\sum_{i=1}^{n-1}\big(-g(x_i)+g(x_{i-1})\big) = Mg(a).$$

Podobně odhadneme $G(\sigma)$ zdola a celkově dostaneme

$$mg(a) \le G(\sigma) \le Mg(a)\,. \tag{5.10}$$

Rozdíl $G(\sigma)$ a $\int_a^b fg$ lze odhadnout pomocí rozdílů horních a dolních součtu funkce g, která je podle předpokladu monotonní, a tedy integrovatelná. Využijeme také omezenosti funkce f (tj. existence K takového, že $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$) k odhadu

$$\Big|G(\sigma)-\int_a^b fg\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f-\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} fg\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\Big(g(x_{i-1})-g(x)\Big)\mathrm{d}x\Big| \le$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big|f(x)\Big(g(x_{i-1})-g(x)\Big)\Big|\mathrm{d}x \le K\sum_{i=1}^n\Big(g(x_{i-1})-g(x_i)\Big)(x_i-x_{i-1}) = K\Big(S_g(\sigma)-s_g(\sigma)\Big)\,.$$

Nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení. Dosadíme-li do posledního odhadu za σ postupně σ_n, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|G(\sigma_n)-\int_a^b fg\Big| \le K\Big(S_g(\sigma_n)-s_g(\sigma_n)\Big) \quad \stackrel{n\to\infty}{\longmapsto} \qquad 0\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to+\infty} G(\sigma_n) = \int_a^b fg\,.$$

Jelikož podle (5.10) je $mg(a) \le G(\sigma_n) \le Mg(a)$, musí i limita posloupnosti padnout do stejných mezí,

$$mg(a) \le \int_a^b fg \le Mg(a)\ .$$

Číslo $\frac{\int_a^b fg}{g(a)}$ padne mezi maximum a minimum spojité funkce $F(x)$, a tedy existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že $F(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{g(a)}$, což přepsáno je

$$g(a)\int_a^\xi f = \int_a^b fg\,.$$

2) Dokažme teď větu pro libovolnou klesající funkci g. Definujeme $\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$. Funkce $\tilde{g}$ splňuje předpoklady, za kterých jsme větu dokázali v bodě 1). Proto

$$\int_a^b f\tilde{g} = \tilde{g}(a)\int_a^\xi f\ .$$

Po dosazení

$$\int_a^b \big(f\,g - f\,g(b)\big) = \int_a^b f\,g - g(b)\int_a^b f = \big(g(a) - g(b)\big)\int_a^x if = g(a)\int_a^\xi f - g(b)\int_a^\xi f$$

a po úpravě

$$\int_a^b f\,g = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_a^b f - g(b)\int_a^\xi f = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f\,.$$

3) V případě, že je g rostoucí, využijeme platnost věty pro klesající funkci $-g$. $\square$

Poznámka. U věty o střední hodnotě II jsme předpokládali existenci $\int_a^b fg$. Je třeba říct, že integrovatelnost f a g na intervalu $\langle a,b\rangle$ už implikuje integrovatelnost součinu fg. Protože jsme tuto implikaci nechtěli dokazovat, přidali jsme kromě potřebných předpokladů integrovatelnosti f a monotonie g (monotonie už vynucuje integrovatelnost) i fakticky zbytečný předpoklad integrovatelnosti fg.

Poznámka. Když o funkcích f a g předpokládame, že f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a g funkce monotonní se spojitou derivaci g' na $\langle a,b\rangle$, pak je důkaz 2. věty o střední hodnotě jednodušší.

Diferencovatelnost funkce g a její monotonie zaručují, že g je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a g' nemění na tomto intervalu znaménko. Navíc $\int_a^b g' = g(b) - g(a)$.

Položme $F(x) = \int_a^x f$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ a integrujme per partes,

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,. \tag{5.11}$$

Z věty o střední hodnotě I aplikované na funkci F a nezápornou, resp. nekladnou, funkci g' dostaneme

$$\int_a^b Fg' = F(\xi)\int_a^b g' = F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)\,. \tag{5.12}$$

Dosazením (5.12) do(5.11) dostaneme

$$\int_a^b fg = g(a)\big(F(\xi) - F(a)\big) + g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big)\,.$$

To už je ekvivalentní s tvrzením věty.

Příklad 5.5.5. Odhadněme stejně jako v příkladě 5.5.2 integrál $\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|$, pro $a > 0$. Použijeme větu o střední hodnotě II, kde za f bereme spojitou, a tedy integrovatelnou funkci $f(x) = \sin x$ a za g vezmeme klesající, a tedy taky integrovatelnou funkci

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pro} \quad x \in \langle a, 2a) \,, \\ \\ 0 & \text{pro} \quad x = 2a \,. \end{cases}$$

Dostaneme odhad

$$\Big| \int_a^{2a} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \Big| = \Big| \frac{1}{a} \int_a^{\xi} \sin x \, \mathrm{d}x \Big| = \Big| \frac{1}{a} \, \big(\cos a - \cos \xi \big) \Big| \le \frac{2}{a} \,,$$

který ukazuje, že hodnota integrálu s rostoucím a klesá k 0. To z odhadu $\big| \int_a^{2a} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \big| \le \ln 2$ získaného v příkladu (5.5.2) nelze vyčíst.

Poznámka. Představíme jiný způsob odvození Lagrangeova a Cauchyho tvaru zbytku v Taylorově vzorci. Pro funkci se spojitou $(n{+}1)$-ní derivací na jistém okolí H_a lze zbytek vyjádřit v integrálním tvaru

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{pro každé} \;\; x \in H_a.$$

Lagrangeův tvar zbytku: Na interval s koncovými body a a x použijme první větu o střední hodnotě, speciálně rovnost (5.9), ve které roli $f(t)$ hraje funkce $(x-t)^n$ a roli spojité funkce $g(t)$ hraje funkce $f^{(n+1)}(t)$. Poznamenejme, že pro pevné $x \in H_a$ funkce $(x - t)^n$ nemění znamánko na intervalu s koncovými body a a x. Podle poznámky 5.5 existuje ξ v intervalu s koncovými body a a x takové, že

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \, f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, (x-a)^{n+1}.$$

Cauchyho tvar zbytku: Opět použijeme rovnost (5.9). Nyní roli $f(t)$ hraje konstantní funkce 1 a roli spojité funkce $g(t)$ hraje funkce $(x-t)^n f^{(n+1)}(t)$. Dostaneme

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \, (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x 1 \, \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \, (x-\xi)^n (x-a).$$

Z integrálního tvaru zbytku jsme odvodili Lagrangeův a Cauchyho tvar, pravda za trochu silnějších předpokladů na $(n+1)$-ní derivaci funkce f, než tomu bylo při odvození v kapitole Taylorův vzorec.

Kapitola 6

Zobecněný Riemannův integrál

6.1 Definice zobecněného integrálu

Při definici určitého integrálu jsme požadovali, aby krajní body intervalu J, na kterém počítáme integrál, byly konečné hodnoty a aby funkce f byla na intervalu J omezená. Tento integrál budeme nazývat **vlastní** a na Riemannovu počest jej budeme značit pomocí písmenka R jako $\mathrm{R}\int_a^b f$.

Zobecnění, které teď zavedeme, připustí také intervaly J s krajními body $\pm\infty$ a nebude požadovat omezenost funkce f na J. Myšlenka zobecnění je založená na spojitosti $\mathrm{R}\int_a^b f$ jako funkce meze.

Dokázali jsme totiž větu, že existence $\mathrm{R}\int_a^b f$ implikuje spojitost funkcí $\mathrm{R}\int_a^x f$ a $\mathrm{R}\int_x^b f$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, což znamená

$$\mathrm{R}\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} \mathrm{R}\int_a^x f \qquad \text{a} \qquad \mathrm{R}\int_a^b f = \lim_{x\to a_+} \mathrm{R}\int_x^b f\,.$$

Limita $\lim_{x\to b_-} \mathrm{R}\int_a^x f$ může však existovat i v případě, kdy o integrálu $\mathrm{R}\int_a^b f$ nemá smysl mluvit, protože je buď $b = +\infty$ nebo f není v okolí bodu b omezená.

Abychom formalizovali tyto úvahy, zavedeme pro funkci f na intervalu J s krajními body $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$, **základní předpoklad**, který může být dvojího typu:

R1) nechť pro všechna $x \in (a, b)$ existuje $\mathrm{R}\int_a^x f$,
R2) nechť pro všechna $x \in (a, b)$ existuje $\mathrm{R}\int_x^b f$.

Definice 6.1.1. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť pro funkci f platí R1), resp. R2). Existuje-li **konečná** limita

$$\lim_{x\to b_-} \mathrm{R}\int_a^x f\,, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to a_+} \mathrm{R}\int_x^b f\ ,$$

nazýváme tuto limitu **zobecněným integrálem** funkce f od a do b a značíme $\int_a^b f$.

Poznámka. Zaveďme ještě několik pojmů, které se objevují v česky psaných textech. My je budeme rovněž užívat.

1. Když $\int_a^b f$ existuje jako $\mathrm{R}\int_a^b f$ - tedy už podle staré definice, říkáme, že $\int_a^b f$ je **vlastní** integrál. Když $\int_a^b f$ existuje podle nové, ale ne podle staré definice, pak nazýváme $\int_a^b f$ **nevlastní** integrál. Místo spojení zobecněný integrál budeme v dalším textu říkat jednoduše integrál.
2. Když $\int_a^b f$ existuje, říkáme, že integrál $\int_a^b f$ **konverguje**, když $\int_a^b f$ neexistuje, (buď z důvodu, že zkoumaná limita je $\pm\infty$ nebo nebo z důvodu, že limita neexistuje) říkáme, že integrál $\int_a^b f$ **diverguje**.
3. Integrál $\int_a^b f$ může být nevlastní buď "vlivem meze"(jeden z bodů a nebo b je nekonečno) nebo "vlivem funkce"(a, b jsou konečné, ale funkce f není omezená v okolí jednoho z krajních bodů). Bod a nebo b nazýváme **kritickým bodem**.

Příklad 6.1.2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1_-}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1_-}\Big[\arcsin x\Big]_0^y = \lim_{y\to 1_-}\arcsin y = \frac{\pi}{2}$$

Příklad 6.1.3.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to -\infty}\int_y^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to -\infty}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_y^0 = -\lim_{y\to -\infty}\operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

Příklad 6.1.4. Integrál z Dirichletovy funkce nelze uvažovat, protože není splněno R1) ani R2).

V předchozích úvahách jsme zobecnili integrál na funkce, které měly jediný kritický bod, a ten byl umístěn na kraji intervalu. Teď uděláme další - už poslední - zobecnění, kde připustíme konečný počet kritických bodů. Využijeme aditivity integrálu v mezích.

Definice 6.1.5. Množinu $M = \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, kde $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, nazveme **vhodným rozdělením** intervalu (a, b) pro funkci f, když pro každý interval (a_{k-1}, a_k), $k = 1, 2 \dots, n$, je splněno $R1$) nebo $R2$).

Definice 6.1.6. Nechť množina $M = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ je vhodným rozdělením intervalu (a, b) pro funkci f. Řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje, když konvergují integrály $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Integrál $\int_a^b f$ pak definujeme vztahem

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f\,.$$

V případě, že alespoň jeden z integrálů $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ diverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ diverguje.

Poznámka. Když k funkci f na intervalu (a,b) najdeme nějaké vhodné rozdělení, pak jich můžeme najít celou řadu. Je proto důležité si uvědomit, že konvergence integrálu ani jeho hodnota nezávisí na tom, které vhodné rozdělení jsme použili.

Příklad 6.1.7. Zkoumejme integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Vhodné rozdělení je např. množina $M = \{-\infty, 0, +\infty\}$. Protože

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[\operatorname{arctg} x\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[\operatorname{arctg} x\big]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}\,,$$

zkoumaný integrál konverguje a jeho hodnota je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

Příklad 6.1.8. Uvažujme integrál $\int_0^2 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$. Vhodné rozdělení je $\{0,1,2\}$. Protože

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1_-} \int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1_-} \big[-\ln(1-x)\big]_0^y = +\infty,$$

můžeme říct, že $\int_0^2 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ diverguje a nemusíme už ani zkoumat $\int_1^2 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Podobně jako u Riemannova určitého integrálu uděláme dodatek k definici: položíme pro $a > b$

$$\int_a^b f := -\int_b^a f, \qquad \text{pokud integrál na pravé straně existuje.}$$

Základní vlastnosti zobecněného integrálu plynou jednoduše z vlastností $\mathrm{R}\!\int_a^b f$ a z vlastností limity. Proto je jenom vyjmenujeme, důkaz je přenechán čtenáři.

Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$, a nechť existují $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$. Pak

- **(linearita)** $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$;
- **(aditivita v mezích)** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pro každé c, $a<c<b$;
- **(nerovnosti)** $\int_a^b f \le \int_a^b g$, pokud $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a,b)$.

6.2 Výpočet zobecněného integrálu

Platnost vět pro výpočet vlastního integrálu rozšíříme na zobecněný Riemannův integrál. Věty vyslovíme jenom pro případ, kdy kritickým bodem je pravý kraj intervalu. Obdobná věta pro levý kraj je nasnadě.

Věta 6.2.1. (Newtonova formule) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť pro funkci f na intervalu $\langle a, b)$ platí R1). Existuje-li funkce F taková, že*

i) *F je primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b) a*

ii) *F má konečné limity $\lim\limits_{a_+} F$, $\lim\limits_{b_-} F$,*

pak existuje $\int_a^b f$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{b_-} F - \lim_{a_+} F \quad \overset{ozn.}{=} \quad [F(x)]_a^b .$$

Důkaz. Pro $x \in (a, b)$ můžeme aplikovat Newtonovu formuli (dokázanou pro vlastní integrál) na uzavřený interval $\langle a, x\rangle$, kde se požaduje spojitost funkce F na celém $\langle a, x\rangle$. Proto dodefinujeme $F(a) := \lim_{a_+} F$. Z Newtonovy formule plyne $\int_a^x f = F(x) - F(a)$. Limitním přechodem pro $x \to b_-$ dostaneme tvrzení věty. $\square$

Věta 6.2.2. (metoda per partes) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť funkce f a g splňují:*

i) *f, g mají spojitou derivaci f', g' v intervalu $\langle a, b)$,*

ii) *existuje konečná limita $\lim_{b_-} fg$ a*

iii) *existuje jeden z integrálů $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$.*

Pak existuje i druhý integrál a platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Důkaz. Aplikujeme větu o metodě per partes pro vlastní integrál na interval $\langle a, x\rangle$, kde $x \in (a, b)$. Všechny předpoklady věty jsou splněny, a tedy

$$\int_a^x f'g = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x fg' \qquad \text{pro každé } x \in (a, b) .$$

Limitním přechodem pro $x \to b_-$ dostaneme tvrzení věty. $\square$

Příklad 6.2.3. Na výpočet nevlastního integrálu $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$ nejdříve formálně použijeme per partes:

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$$

Teď ověřme předpoklady věty: integrál $\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$ existuje, protože je to dokonce vlastní integrál z konstanty a je roven 1. Pomocí l'Hospitalova pravidla snadno ukážeme, že $\lim\limits_{x \mapsto 0} x \ln x = 0$. Spojitost funkce $x \ln x$ v bodě 1 zase dává $\lim\limits_{x \mapsto 1} x \ln x = 0$. Proto

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = -1$$

Věta 6.2.4. (substituční metoda) *Nechť funkce ϕ je ostře monotonní a má spojitou derivaci ϕ' na intervalu $\langle \alpha, \beta)$ a nechť funkce f je spojitá na intervalu $\phi\langle \alpha, \beta)$. Označme $a := \phi(\alpha)$, $b := \lim_{\beta_-} \phi$. Pak platí*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že ϕ je ostře rostoucí. Pak obraz intervalu $\langle \alpha, \beta)$ má tvar $\phi\langle \alpha, \beta) = \langle a, b)$. Inverzní funkce ϕ^{-1} je ostře rostoucí na $\langle a, b)$. Platí

$$\lim_{b_-} \phi^{-1} = \beta, \quad \text{a navíc} \quad \big(\forall z \in \langle \alpha, \beta)\big)\ \big(\phi(z) < b\big) \text{ a } \big(\forall y \in \langle a, b)\big)\ \big(\phi^{-1}(y) < \beta\big)\,.$$

Spojitost funkcí f, ϕ a ϕ' zaručuje splnění předpokladů pro metodu substituce ve vlastním integrálu na intervalu $\langle \alpha, z\rangle$, pro každé $z \in (\alpha, \beta)$. Proto

$$\int_\alpha^z f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(z)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{\phi(z)} f \quad \text{pro každé } \ z \in (\alpha, \beta)\ . \tag{6.1}$$

1) Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f$, tj. $\lim_{y\to b-} \int_a^y f$ existuje a je konečná. Z věty o limitě složené funkce pak existuje i $\lim_{z\to\beta_-} \int_a^{\phi(z)} f$ a platí

$$\lim_{z\to\beta_-} \int_a^{\phi(z)} f = \lim_{y\to b_-} \int_a^y f = \int_a^b f\ .$$

Pro ověření předpokladů věty o limitě složené funkce jsme využili toho, že $\phi(z) \neq b$ pro každé $z \neq \beta$. Dosazení do levé strany podle vztahu (6.1) dává tvrzení věty.

2) Předpokládejme, že existuje $\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t$, tj. $\lim\limits_{z\to\beta_-} \int_\alpha^z f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t$ existuje a je konečná. Z věty o limitě složené funkce pak existuje i $\lim\limits_{y\to b_-} \int_\alpha^{\phi^{-1}(y)} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t$ a platí

$$\lim_{y\to b_-} \int_\alpha^{\phi^{-1}(y)} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{z\to\beta_-} \int_\alpha^z f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Po dosazení z (6.1) do levé strany dostaneme

$$\lim_{y\to b_-} \int_\alpha^{\phi^{-1}(y)} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{y\to b_-} \int_a^{\phi(\phi^{-1}(y))} f \ = \lim_{y\to b_-} \int_a^y f\ ,$$

což dává požadovanou rovnost. □

Příklad 6.2.5. Pomocí substituce $x = \phi(t) = \operatorname{arctg} t$ spočítáme integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}\, t}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\ .$$

Interval $\langle \alpha, \beta) = \langle 0, +\infty)$ se zobrazí na $\langle a, b) = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Rovnost

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}\, t}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$$

platí za podmínky, že alespoň jeden z integrálů existuje. Integrál napravo je vlastní integrál spojité funkce, a proto existuje.

6.3 Konvergence zobecněného integrálu

V případě, že hodnotu zobecněného Riemannova integrálu nebudeme umět spočítat, bude nás alespoň zajímat, zda integrál existuje, tj. zda konverguje. Otázku konvergence integrálu musíme rovněž zodpovědět dřív, než použijeme pro výpočet integrálu metodu per partes nebo substituci. V této kapitole všechna tvrzení vyslovíme pro funkce, u kterých je na intervalu J splněná podmínka R1). Samozřejmě obdobné věty lze vyslovit i pro případ, kdy funkce na J vyhovuje podmínce R2).

Konvergence nevlastního integrálu podle definice znamená existenci a konečnost limity jisté funkce. Proto nutnou a postačující podmínku konvergence integrálu lze získat přímo z Bolzanova - Cauchyho kritéria pro funkce.

Věta 6.3.1. *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť pro funkci f platí R1). Pak*

$$\int_a^b f \ \text{ konverguje } \iff \big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists c \in (a,b)\big)\big(\forall x', x'' \in (c,b)\big)\left(\left|\int_{x'}^{x''} f\right| < \varepsilon\right)$$

Důsledek 6.3.2. *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť pro funkci f platí R1). Pak*

$$\int_a^b |f| \ \textit{ konverguje } \implies \int_a^b f \ \textit{ konverguje}$$

Důkaz. Z předpokladu víme, že pro každé $x \in (a,b)$ existuje vlastní Riemannův integrál $R\int_a^x f$. Pro vlastní Riemannův integrál z existence integrálu funkce f na omezeném intervalu plyne i existence integrálu funkce $|f|$ na stejném intervalu. Proto funkce $|f|$ rovněž splňuje podmínku R1). Konvergence $\int_a^b |f|$ podle předchozí věty znamená

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists c \in (a,b)\big)\big(\forall x', x'' \in (c,b)\big)\left(\left|\int_{x'}^{x''} |f|\right| < \varepsilon\right)\ .$$

Protože

$$\Big|\int_{x'}^{x''} f\Big| \le \Big|\int_{x'}^{x''} |f|\Big| \ ,$$

vyhovuje Bolzanovu - Cauchyho kritériu pro integrály i samotná funkce f. $\square$

Příklad 6.3.3. Dokažme pomocí Bolzanova - Cauchyho kritéria konvergenci

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\ .$$

Protože funkce $\frac{1}{x}$ je na každém intervalu $\langle x', x''\rangle \subset \langle 1, +\infty)$ monotonní a nezáporná a funkce $\sin x$ je spojitá (tedy integrovatelná) na $\langle x', x''\rangle$, lze použít druhou větu o střední hodnotě,

$$\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{x'}\int_1^{\xi} \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{x'}(\cos 1 - \cos\xi)\ .$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ stačí položit $c := 2/\varepsilon$. Pak pro libovolné $x', x'' > c$ platí

$$\Big|\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x\Big| \ \le\ \frac{2}{x'}\ <\ \frac{2}{c} = \varepsilon,$$

což podle Bolzanova - Cauchyho kritéria znamená konvergenci zkoumaného integrálu.

Pomocí stejného kritéria dokážeme, že integrál

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x \quad \text{diverguje}\ .$$

Máme dokázat

$$\big(\exists\varepsilon > 0\big)\big(\forall c \in (1, +\infty)\big)\big(\exists x', x'' \in (c, +\infty)\big)\Big(\int_{x'}^{x''} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \varepsilon\Big)\ .$$

Položme $\varepsilon := \frac{1}{\pi}$ a pro libovolné zadané $c > 1$ budeme uvažovat pár $x' = n\pi, x'' = 2n\pi$, kde $n = [c] + 1$. Platí rovnosti a odhady:

$$\int_{n\pi}^{2n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{2n-1}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + k\pi}\ \mathrm{d}x \ge$$

$$\ge \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k+1)\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x}_{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k}^{2n-1}\frac{1}{k+1} \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi} = \varepsilon$$

Poznámka. Předchozí příklad ukazuje, že implikaci v důsledku 6.3.2 nelze obrátit.

Definice 6.3.4. Nechť integrál $\int_a^b f$ konverguje.

- Když konverguje také $\int_a^b |f|$, říkáme, že $\int_a^b f$ **konverguje absolutně**.

- Když $\int_a^b |f|$ diverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ **konverguje neabsolutně.**

Nejdříve se budeme věnovat konvergenci integrálu z nezáporných funkcí. Když funkce f je nezáporná na intervalu $\langle a,b)$ a vyhovuje podmínce R1), je funkce $F(x) := \int_a^x f$ rostoucí na (a,b). Proto limita $\lim_{b-} \int_a^x f$ existuje. Pro konvergenci integrálu stačí tedy sledovat konečnost této limity.

Věta 6.3.5. (srovnávací kritérium) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, nechť funkce f a g splňují R1) a nechť*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ \ \textit{pro každé} \ \ x \in \langle a,b).$$

Pak platí:

$$\int_a^b g \ \ \textit{konverguje} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \ \ \textit{konverguje}$$

$$\int_a^b f \ \ \textit{diverguje} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g \ \ \textit{diverguje}$$

Důkaz. Z věty o nerovnostech v integrálech víme, že nerovnost $f(t) \leq g(t)$ splněná na celém intervalu $\langle a,b)$ implikuje

$$\int_a^x f \leq \int_a^x g \quad \text{pro každé } x \in \langle a,b).$$

Protože pro $x \to b_-$ existují limity obou stran nerovností, plyne z věty o nerovnostech v limitách

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} \int_a^x f \leq \lim_{x\to b_-} \int_a^x g = \int_a^b g \ .$$

Tato nerovnost dává tvrzení věty. □

Věta 6.3.6. (srovnávací kritérium - limitní tvar) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, nechť pro nezápornou funkci f a kladnou funkci g na intervalu $\langle a,b)$ je splněno R1) a nechť*

$$\textit{existuje} \quad \lim_{x\to b_-} \frac{f}{g} =: L \ .$$

Platí:

- *pokud $L < +\infty$ a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje;*
- *pokud $L > 0$ a $\int_a^b g$ diverguje, pak $\int_a^b f$ diverguje;*
- *pokud $0 < L < +\infty$, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_a^b g$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $L < +\infty$ a že $\int_a^b g$ konverguje. Pak na jistém levém okolí (c,b) bodu b, kde $a < c < b$, platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} < (L+1) \quad \Rightarrow \quad f(x) < (L+1)g(x)\,. \tag{6.2}$$

Protože
$$\lim_{x\to b_-}\int_a^x g = \int_a^c g + \lim_{x\to b_-}\int_c^x g,$$
plyne z konvergence integrálu $\int_a^b g$ také konvergence integrálu $\int_c^b g$, a tedy také integrálu $\int_c^b (L+1)g$. Ze srovnávacího kritéria uvedeného v předešlé větě a (6.2) dostaneme konvergenci integrálu $\int_c^b f$. Protože
$$\lim_{x\to b_-}\int_a^x f = \int_a^c f + \lim_{x\to b_-}\int_c^x f,$$
konverguje rovněž $\int_a^b f$.

Druhá část tvrzení se dokazuje analogicky, třetí je pouze kombinací prvních dvou. □

Příklad 6.3.7. Zkoumejme konvergenci integrálu
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$
Nejdříve se podívejme na konvergenci integrálu funkce v absolutní hodnotě. Jelikož
$$\text{pro každé } x \in \langle 1,+\infty)\ \text{ platí }\quad \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad \text{a} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1,$$
plyne ze srovnávacího kritéria, že integrál $\int_1^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje. To ovšem znamená, že $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně.

Srovnávací věty pro integrály jsou analogií vět pro řady s nezápornými členy. Podobně jako u řad s kladnými členy budou úlohu kalibrovacího integrálu pro kritický bod $b=+\infty$ hrát integrály
$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \alpha \le 1,\\ \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} & \text{pro } \alpha > 1.\end{cases}$$
Jiná bude situace, v níž bude kritickým bodem horní mez $b\in\mathbb{R}$. V tomto případě lze jako kalibrovací integrál použít
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \alpha \ge 1,\\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 1.\end{cases}$$

Příklad 6.3.8. Rozhodneme o konvergenci integrálu
$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$
Integrál rozdělíme na dvě části, jednu s kritickým bodem 0 (kritický pouze pro jisté hodnoty parametru β) a druhou s kritickým bodem $+\infty$. Pro konvergenci integrálu

$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ použijeme srovnání s integrálem $\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta-1}}\,\mathrm{d}x$. Protože

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\beta-1}}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

konverguje $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ podle limitního tvaru srovnávacího kritéria právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta-1}}\,\mathrm{d}x$, a to je pro exponent $\beta - 1 < 1$, tj. $\beta < 2$.

O konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ rozhodneme srovnáním s integrálem $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$, který konverguje pouze v případě $\beta > 1$. Protože

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}}{\frac{1}{x^\beta}} = \frac{\pi}{2}\ ,$$

dostaneme z limitního srovnávacího kritéria, že integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\beta > 1$. Celkově shrneme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje, právě když} \quad \beta \in (1,2).$$

Příklad 6.3.9. Konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

lze ukázat i jinak, než přímo z Bolzanova - Cauchyho kritéria, viz příklad 6.3.3. Použijeme metodu per partes pro zobecněný Riemannův integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos x\,\mathrm{d}x\ .$$

Jelikož $\left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_1^{+\infty} = \cos 1$ a integrál $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ konverguje (viz předchozí příklad), jsou splněny předpoklady věty o per partes. Z té už plyne, že $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Úzký vztah mezi konvergencí řad s kladnými členy a konvergencí integrálů kladných funkcí vyjádřuje následující věta.

Věta 6.3.10. (integrální kritérium konvergence řad) *Nechť f je kladná funkce klesající na $\langle 1, +\infty)$.*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \ \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \ \ \textit{konverguje}$$

Důkaz. Monotonie funkce zaručuje, že funkce f splňuje podmínku R1) na intervalu

$(1,+\infty)$. Kladnost funkce $f(x)$ zase zaručuje existenci obou limit

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n f(k)\ .$$

Že tyto limity jsou buď současně obě v $\mathbb{R}$ nebo současně jsou rovny $+\infty$, ukazují následující dva odhady

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x)\,\mathrm{d}x \ \geq\ \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n f(k)$$

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq\ \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(k-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n f(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

□

Příklad 6.3.11. Odůvodnění konvergence řad

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \qquad \text{s parametry} \ \ \alpha>1 \ \ \text{a} \ \ \beta>1$$

v kapitole Číselné řady bylo dost pracné. Jelikož funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ je kladná a klesající na intervalu $\langle 1,+\infty\rangle$ a funkce $\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ je kladná a klesající na intervalu $\langle 2,+\infty\rangle$, lze snadný důkaz konvergence těchto řad získat použitím předchozí věty. Platí totiž

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1} \qquad \text{a} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}}\,.$$

Tedy oba dva integrály a v důsledku toho i obě dvě řady jsou konvergentní.

Kapitolu zakončíme další analogií mezi řadami a integrály.

Věta 6.3.12. (Dirichletovo kritérium pro konvergenci integrálu) *Nechť f a fg splňují R1) na intervalu $\langle a,b)$, kde $-\infty<a<b\leq+\infty$. Pokud platí*

1) $F(x):=\int_a^x f$ je funkcí omezenou na $\langle a,b)$ a

2) g je funkcí monotonní na $\langle a,b)$, s limitou $\lim_{b_-} g=0$,

pak integrál $\int_a^b fg$ konverguje.

Důkaz. Pro integrál $\int_a^b fg$ ověříme platnost Bolzanovy - Cauchyho podmínky pro konvergenci integrálu. Z bodu 1) existuje konstanta K tak, že

$$\Big|\int_a^x f\Big| \leq K \quad \text{pro každé } x\in(a,b).$$

Skutečnost, že $\lim_{b_-} g = 0$, lze ekvivalentně přepsat jako podmínku

$$(\forall \delta > 0)(\exists \textit{ levé okolí } H_{b_-})(\forall x \in H_{b_-} \cap D_g)(|g(x)| < \delta)\ . \tag{6.3}$$

Připomeňme, že g je definovaná na $\langle a, b)$. Proto část "$(\exists$ levé okolí $H_{b_-})(\forall x \in H_{b_-} \cap D_g)$"znamená "$(\exists c > a)(\forall x \in (c, b))$".

Mějme libovolné $\varepsilon > 0$, položme $\delta := \frac{\varepsilon}{2K}$. Pak k tomuto δ nalezneme $c > a$ tak, aby platila (6.3). Pro libovolné $x', x'' \in (c, b)$, $x' < x''$ můžeme aplikovat větu o střední hodnotě integrálu II, která zaručuje existenci $\xi \in \langle x', x'' \rangle$ použitého v následujícím odhadu:

$$\Big|\int_{x'}^{x''} fg\Big| = \Big|g(x')\int_{x'}^{\xi} f\Big| = |g(x')|\Big|\int_a^{\xi} f - \int_a^{x'} f\Big| < 2K\delta = \varepsilon\,.$$

Ověřili jsme tedy Bolzanovu - Cauchyho podmínku, a proto $\int_a^b fg$ konverguje. □

Abychom nevzbudili mylný dojem, že vyšetřování konvergence integrálu lze nahradit vyšetřováním konvergence řady, uvedeme příklad konvergentního integrálu $\int_1^{+\infty} f$, přičemž $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} f(n)$ neexistuje, dokonce funkce $f(x)$ není ani omezená na okolí $+\infty$. Jelikož ani restrikce $f_{/\mathbb{N}}$ není omezená, je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergentní.

Příklad 6.3.13. Dokažme konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} x\cos(e^x)\mathrm{d}x.$$

Ta vyplyne z Dirichletova kritéria, kde funkce f a g volíme takto:

$$f(x) = e^x\cos(e^x) \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{x}{e^x}\ .$$

Ověřme, že jsou splněny předpoklady kritéria.

1) Protože $F(x) := \int_1^x e^t\cos(e^t)\,\mathrm{d}t = [\sin(e^t)]_1^x$, je funkce $F(x)$ omezená na $\langle 1, +\infty)$.

2) Z l'Hospitalova pravidla snadno dostaneme, že $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Pro derivaci $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ platí $g'(x) \le 0$ pro každé $x \in \langle 1, +\infty)$, tedy funkce g je klesající na $\langle 1, +\infty)$.

Kapitola 7

Aplikace Riemannova integrálu

7.1 Délka grafu funkce

Představme si, že naším úkolem je změřit délku spojité čáry namalované na papíře. Kdybychom měli k dispozici rovné pravítko s vyznačenými milimetrovými vzdálenostmi, tak bychom si na čáře zvolili dostatečný počet bodů, vzdálenosti sousedních bodů bychom změřili a tyto vzdálenosti pak sečetli. To, co bychom takto dostali, by bylo o něco kratší než skutečná délka čáry, chyba našeho odhadu délky by závisela na množství bodů zvolených na čáře. Tato jednoduchá myšlenka je schována za definicí délky grafu funkce.

Definice 7.1.1. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(x_i - x_{i-1}\big)^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2}$$

nazýváme **délka lomené čáry** aproximující graf funkce f při rozdělení σ.

Na grafu funkce f jsme tedy v předchozí definici zvolili $n+1$ bodů tvaru $\big(x_i, f(x_i)\big)$ a vzdálenosti dvou sousedních bodů $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$ a $\big(x_i, f(x_i)\big)$ jsme vypočetli pomocí Pythagorovy věty.

Poznámka. Z definice $\ell(\sigma)$ a trojúhelníkové nerovnosti je zřejmé, že

$$\ell(\sigma') \geq \ell(\sigma) \quad \text{pro každé zjemnění } \sigma' \text{ rozdělení } \sigma.$$

Definice 7.1.2. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$L := \sup_{\sigma} \ell(\sigma)$$

nazýváme **délkou grafu funkce** f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $L < +\infty$, říkáme, že graf funkce je **rektifikovatelný**.

Příklad 7.1.3. Zkonstruujeme příklad nerektifikovatelného grafu funkce. V rovině definujme body

$$A_n = \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) \quad \text{a} \quad B_n = \Big(\frac{1}{n}, 0\Big) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Množina bodů sestávající ze sjednocení bodu 0 a úseček

$$B_1A_2,\ A_2B_3,\ B_3A_4,\ A_4B_5,\ B_5A_6, \ldots, B_{2n-1}A_{2n},\ A_{2n}B_{2n+1}\ldots$$

je grafem spojité funkce f s definičním oborem $\langle 0,1\rangle$ a oborem hodnot $\langle 0, 1/2\rangle$.

Graf této funkce není rektifikovatelný. Dokazuje to následující úvaha:

Protože délky úseček $B_{2k-1}A_{2k}$ a $A_{2k}B_{2k+1}$ jsou v součtu větší než $1/k$, je při rozdělení $\sigma_n := \big\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\big\}$ délka lomené čáry $\ell(\sigma_n) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, je $L = \sup_\sigma \ell(\sigma) = +\infty$.

Poznámka. V případě, že funkce f má na intervalu (a,b) derivaci, lze výrazy v sumě definující délku lomené čáry vyjádřit i ve tvaru

$$\sqrt{\big(x_i - x_{i-1}\big)^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2} = (x_i - x_{i-1})\,\sqrt{1 + \Big(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\Big)^2}$$

a na úpravu zlomku pod odmocninou použít Lagrangeovu větu o přírůstku funkce. Pro délku lomené čáry dostaneme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sqrt{1 + \Big(f'(\eta_i)\Big)^2}, \quad \text{kde } \eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \tag{7.1}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že je-li navíc derivace f' omezna konstantou K, je

$$\ell(\sigma) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1+K^2} = (b-a)\sqrt{1+K^2} < +\infty,$$

a tedy graf dané funkce je rektifikovatelný.

Věta 7.1.4. *Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak graf funkce f je rektifikovatelný a pro jeho délku L platí*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\ \mathrm{d}x\ .$$

Důkaz. Nejdříve ukažme, že existuje normální posloupnost rozdělení (σ_n) intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $\ell(\sigma_n) \to L = \sup_\sigma \ell(\sigma)$. Z druhé vlastnosti supréma najdeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ rozdělení $\tilde{\sigma}_n$ takové, že $\ell(\tilde{\sigma}_n) > L - \frac{1}{n}$. Za σ_n pak vezmeme takové zjemnění $\tilde{\sigma_n}$, aby jeho norma $\nu(\sigma_n)$ byla menší než $\frac{1}{n}$. Posloupnost (σ_n) je tedy normální. Z poznámky za definicí délky lomené čáry a z 1. vlastnosti supréma plyne, že $L \geq \ell(\sigma_n) \geq \ell(\tilde{\sigma}_n) > L - \frac{1}{n}$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\sigma_n) = L. \tag{7.2}$$

Pro dokončení důkazu si stačí uvědomit, že délka lomené čáry $\ell(\sigma)$ ve tvaru (7.1) je integrálním součtem $\mathcal{J}(\sigma)$ funkce $\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$. Předpoklad spojitosti funkce f' zaručuje existenci integrálu od a do b z funkce $\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$. Použijeme-li vyjádření délky lomené čáry pomocí integrálního součtu pro členy právě nalezené normální posloupnosti rozdělení (σ_n), dostaneme ze základní věty integrálního počtu, že

$$\lim_{n\to+\infty} \ell(\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

To spolu s (7.2) dokazuje větu. □

Příklad 7.1.5. Obvod kružnice o poloměru R lze spočítat jako dvojnásobek délky grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \text{kde} \quad x \in \langle -R, R\rangle\ .$$

Dosadíme-li do vzorce z věty 7.1.4 derivaci $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, odvodíme pro obvod kružnice

$$\text{Obvod } = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2R\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2R\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R} = 2\pi R\,.$$

Poznámka. Je-li funkce f zadaná parametricky pomocí prosté funkce $x = \varphi(t)$ a funkce $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, dostaneme po substituci $x = \varphi(t)$ v integrálu z věty 7.1.4 vyjádření pro délku grafu funkce zadané parametricky

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, \mathrm{d}t\ .$$

7.2 Zavedení goniometrických funkcí a číslo π

Funkce sin a cos jsme používali doposud pouze pro ilustraci teorie na příkladech. Důkaz žádné věty se neopíral o tyto funkce. Pro geometrickou definici funkcí sin a cos, jak ji známe ze střední školy, potřebujeme zavést úhel, lépe řečeno velikost úhlu.

Velikost úhlu, který svírají dvě polopřímky vycházející z daného bodu, se měří pomocí délky oblouku, který tyto dvě polopřímky vytnou na kružnici o jednotkovém poloměru. Délku oblouku, která přísluší polopřímkám, jejichž sjednocením je celá přímka (jedná se proto o přímý úhel), jsme označili písmenkem π. Teď, když jsme korektně zavedli pojem délky grafu funkce, tedy speciálně i délky částí kružnice, je geometrická definice funkcí sin a cos úplná.

V příkladech, kde se vyskytly goniometrické funkce, jsme nepracovali přímo s definicí těchto funkcí, ale využívali jsme jejich vlastností. Proto nás otázka, jak je definován úhel, netrápila. Některé vlastnosti, jako jsou např. součtové vzorce typu $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ap., lze odvodit z geometrické definice funkcí sin a cos a toto odvození studenti viděli už na střední škole. Pro výpočet derivace funkcí sin a cos je kromě součtových vzorců klíčová jediná limita, a to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Že tato limita existuje a je rovna 1 jsme nedokazovali[1] (a ani dokázat nemohli), brali jsme tento fakt v podstatě jako axióm. Nyní tuto mezeru doplníme.

Věta 7.2.1. *Existuje jediná dvojice funkcí s a c s těmito vlastnostmi:*

1. *definiční obor s a c je $\mathbb{R}$,*
2. *pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí*
$$s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x) \quad a \quad c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)\ ,$$
3. *s je lichá funkce, c je sudá funkce,*
4. *$s(0) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{s(x)}{x} = 1$.*

Důkaz. (Existence) Ukážeme, že mocninné řady

$$\mathcal{S}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \mathcal{C}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{7.3}$$

vyhovují požadavkům *1 - 4*. Určeme poloměr konvergence ρ mocninné řady $\mathcal{S}(x)$. V našem případě

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = +\infty\,.$$

Tedy $\mathcal{S}$ je definována na celém $\mathbb{R}$. Mocninnou řadu lze derivovat člen po členu uvnitř oboru konvergence, u nás tedy na celém $\mathbb{R}$. Dostaneme

$$\mathcal{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \mathcal{C}(x)\,.$$

To ovšem znamená, že $\mathcal{C}(x)$ má definiční obor stejný jako $\mathcal{S}$, tedy $\mathbb{R}$. Snadno rovněž nahlédneme, že

$$\mathcal{C}'(x) = -\mathcal{S}(x).$$

[1] Tvrzení $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ lze snadno odvodit, když se použije nerovnost $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pro malá kladná x. Dokázat tuto nerovnost vyžaduje stejně složitý matematický aparát a snad ještě složitější postup, než jaký použijeme pro odvození zmiňované limity.

Dosazením zjistíme, že $\mathcal{S}(0) = 0$ a $\mathcal{C}(0) = 1$. Proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{S}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(0)}{x} = \mathcal{S}'(0) = \mathcal{C}(0) = 1.$$

Máme tedy ověřeny vlastnosti *1* a *4*. Z tvaru mocninných řad $\mathcal{S}$ a $\mathcal{C}$ je zřejmá i vlastnost *3*. Zbývá tedy ukázat součtové vzorce. K tomu účelu vyšetříme pro libovolný reálný parametr y derivaci funkce

$$\phi(x) := \Big(\mathcal{S}(x+y) - \mathcal{S}(x)\mathcal{C}(y) - \mathcal{S}(y)\mathcal{C}(x)\Big)^2 + \Big(\mathcal{C}(x+y) - \mathcal{C}(x)\mathcal{C}(y) + \mathcal{S}(x)\mathcal{S}(y)\Big)^2$$

$$\phi'(x) = 2\Big(\mathcal{S}(x+y) - \mathcal{S}(x)\mathcal{C}(y) - \mathcal{S}(y)\mathcal{C}(x)\Big)\Big(\mathcal{C}(x+y) - \mathcal{C}(x)\mathcal{C}(y) + \mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x)\Big) +$$

$$+2\Big(\mathcal{C}(x+y) - \mathcal{C}(x)\mathcal{C}(y) + \mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x)\Big)\Big(-\mathcal{S}(x+y) + \mathcal{S}(x)\mathcal{C}(y) + \mathcal{S}(y)\mathcal{C}(x)\Big) = 0$$

Funkce ϕ je tedy konstantní na $\mathbb{R}$ a tato konstanta je $\phi(0) = 0$. Jelikož $\phi(x)$ je součtem druhých mocnin dvou závorek, je každá ze závorek rovna 0, a to znamená platnost součtových vzorců uvedených v bodě *3*.

(Jednoznačnost) Z toho, že $\lim_0 \frac{s(x)}{x} = 1$ plyne, že $s(x)$ je nenulová na jistém okolí H_0^* vyjma samotného bodu 0. Uvažujme $x_0 \in H_0^* - \{0\}$. Pak z vlastností *2* a *4* máme

$$s(x_0) = s(x_0 + 0) = s(x_0)c(0) + s(0)c(x_0) = s(x_0)c(0).$$

Po zkrácení pravé a levé strany výrazem $s(x_0)$ dostaneme

$$c(0) = 1. \tag{7.4}$$

Použijeme právě odvozenou hodnotu $c(0)$ a vlastnosti *2* a *3*, abychom odvodili

$$1 = c(0) = c\big(x + (-x)\big) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) = c^2(x) + s^2(x). \tag{7.5}$$

To ovšem implikuje omezenost funkcí s a c

$$|s(x)| \leq 1 \quad \text{a} \quad |c(x)| \leq 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Teď ukážeme spojitost funkcí s a c v bodě 0:

$$\lim_{x\to 0} s(x) = \lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} x = 1.0 = 0 = s(0).$$

Pro odvození spojitosti c v nule použijeme vztah získaný z *2*,

$$s(2x) = s(x + x) = s(x)c(x) + s(x)c(x) = 2s(x)c(x).$$

Pro $x \in H_0^* - \{0\}$ platí

$$c(x) = \frac{s(2x)}{2x} \, \frac{x}{s(x)}.$$

Z věty o limitě složené funkce a vlastnosti *4* získáme

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{x\to 0} \frac{s(2x)}{2x} \, \frac{x}{s(x)} = 1 = c(0).$$

To nám umožní využít (7.5) a *4* a ukázat, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-c(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-c^2(x)}{x} . \frac{1}{1+c(x)} = \lim_{x\to 0} x \, \frac{s^2(x)}{x^2} \, \frac{1}{1+c(x)} = 0.1.\frac{1}{2} = 0. \qquad (7.7)$$

Funkce $s(x)$ a $c(x)$ jsou diferencovatelné v každém bodě x a platí

$$s'(x) = c(x) \quad \text{a} \quad c'(x) = -s(x), \qquad (7.8)$$

protože

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s(x)c(h) + s(h)c(x) - s(x)}{h} =$$

$$= s(x) \lim_{h\to 0} \frac{c(h) - 1}{h} + c(x) \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = c(x),$$

v důsledku vlastností *2* a *4* a vztahu (7.7). Podobně lze odvodit $c'(x) = -s(x)$.

Vztahy (7.8) implikují, že funkce s a c mají derivace všech řádů. Speciálně pro bod 0 platí

$$s^{(2n)}(0) = (-1)^n s(0) = 0, \qquad s^{(2n+1)}(0) = (-1)^n c(0) = (-1)^n\,,$$

$$c^{(2n)}(0) = (-1)^n c(0) = (-1)^n, \qquad c^{(2n+1)}(0) = (-1)^n s(0) = 0\,.$$

Taylorovy polynomy $T_{n,s}$ a $T_{n,c}$ pro funkce s a c se středem v bodě 0 mají tedy tvar

$$T_{2n+1,s}(x) = T_{2n+2,s}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad \text{a} \quad T_{2n,c}(x) = T_{2n+1,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Jelikož pro libovolné reálné a je limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

platí pro Lagrangeovy zbytky

$$|R_{s,2n+2}(x)| = \frac{|c(\xi)|}{(2n+3)!}\,|x|^{2n+3} \leq \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!} \mapsto 0, \quad \text{a} \quad |R_{2n+1,c}(x)| \mapsto 0.$$

Dodejme, že jsme při odhadech využili (7.6). To ale znamená, že funkce s a c se rovnají limitě svých Taylorových řad, a tedy nutně

$$s(x) = \mathcal{S}(x) \quad \text{a} \quad c(x) = \mathcal{C}(x).$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Věta 7.2.2. *Nechť funkce s a c jsou funkcemi s vlastnostmi 1-4 z věty 7.2.1. Pak existuje kladné číslo α takové, že s je ostře rostoucí a c ostře klesající na intervalu $\langle 0,\alpha\rangle$ a platí*

$$s(\alpha) = 1 = c(0) \quad a \quad c(\alpha) = 0 = s(0).$$

Důkaz. Podle důkazu věty 7.2.1 mají s a c tvar (7.3),

$$s(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \ldots = \frac{x}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2.3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10.11}\right) + \ldots$$

Pro $0 < x < 2$ jsou výrazy v závorkách kladné, a tedy $s(x) \geq 0$ pro $x \in (0,2)$. Proto má funkce $c(x)$ na intervalu $(0,2)$ derivaci $-s(x) < 0$. Tedy $c(x)$ je klesající na $(0,2)$. Dosadíme-li $x = 2$ do vztahu

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \ldots\,,$$

jsou výrazy v závorkách kladné, a proto

$$c(2) < 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3.4}\right) = -\frac{1}{3} < 0\,.$$

Funkce $c(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a klesající na $(0,2)$, přitom $c(0) = 1$ a $c(2) < 0$. Proto existuje jediné $\alpha \in (0,2)$ tak, že $c(\alpha) = 0$. To ovšem znamená, že funkce c je na intervalu $(0,\alpha)$ kladná. Tedy funkce $s(x)$ má na intervalu $(0,\alpha)$ kladnou derivaci $c(x)$, což implikuje, že s je ostře rostoucí na intervalu $\langle 0,\alpha\rangle$. Protože $s(0) = 0$, je $s(\alpha) > 0$. Ze vztahu (7.5) plyne $s(\alpha) = 1$. $\square$

Poznámka. Z věty 7.2.2 a součtových vzorců *3)* ve větě 7.2.1 lze pak odvodit pro číslo α např.

- $s(2\alpha) = s(\alpha)c(\alpha) + s(\alpha)c(\alpha) = 0,$
- $c(2\alpha) = c(\alpha)c(\alpha) - s(\alpha)s(\alpha) = -1,$

- $s(\alpha - x) = s(\alpha)c(-x) + s(-x)c(\alpha) = c(x)$ pro každé reálné x,
- $s(x + 2\alpha) = s(x)c(2\alpha) + c(x)s(2\alpha) = -s(x)$ pro každé reálné x,
- $s(x + 4\alpha) = s\big((x + 2\alpha) + 2\alpha\big) = s(x + 2\alpha) = s(x)$ pro každé reálné x, tj. 4α je perioda funkce s.

Podobně lze odvodit další vlastnosti čísla α.

Zbývá nám ještě ukázat, že funkce s a c z věty 7.2.1 jsou goniometrické funkce sin a cos, jak byly geometricky definovány na střední škole a že číslo α je $\pi/2$.

Zkoumejme, na jakém intervalu $\langle x_0, 1\rangle$, kde $0 < x_0 < 1$, máme uvažovat funkci $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, aby délka grafu funkce byla rovna zvolenému číslu β. Funkce f popisuje kružnici s jednotkovým poloměrem a středem v počátku. Zkoumáme tedy, kam umístit x_0, aby délka oblouku mezi body kružnice $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ a $(1, 0)$ byla právě β. Poznamenejme, že takové x_0 jsme nazývali $\cos\beta$, příslušné y_0 pak $\sin\beta$.

Hledané x_0 má tedy splňovat

$$\beta = \int_{x_0}^{1} \sqrt{1 + (f')^2} = \int_{x_0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Použijeme substituci $x = c(t)$. Z důkazu věty 7.2.1 plyne, že funkce s a c jsou součty mocninných řad s nekonečným poloměrem konvergence, a tedy nekonečněkrát diferencovatelné na celém $\mathbb{R}$. Použitá substituce je tedy přípustná. Z důkazu rovněž plyne rovnost $s^2(x) + c^2(x) = 1$. Podle věty 7.2.2 zobrazuje funkce c interval $\langle 0, \alpha\rangle$ na interval $\langle 0, 1\rangle$. Pro $x_0 \in (0, 1)$ proto najdeme $t_0 \in (0, \alpha)$ tak, že $c(t_0) = x_0$.

$$\beta = \int_{t_0}^{0} \frac{s(t)}{\sqrt{1 - c^2(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{0} -1\,\mathrm{d}t = t_0.$$

Tedy za x_0 máme vzít $c(\beta)$ a za $y_0 = \sqrt{1 - x_0^2} = s(\beta)$. Tím jsme dokázali, že funkce definované mocninnými řadami $\mathcal{S}$ a $\mathcal{C}$ nejsou nic jiného než funkce sin a cos.

Chceme-li vypočíst délku čtvrtkružnice s poloměrem 1, uvažujeme $x_0 = 0$. V tomto případě je $t_0 = \alpha$. Délka čtvrtkružnice výjde α. Číslo π je definováno, jako délka půlkružnice s poloměrem 1, a proto je $\alpha = \pi/2$.

Všem komplikacím kolem funkcí sinus a kosinus se lze v matematice elegantně vyhnout, když zavrhneme jakékoliv geometrické interpretace a prohlásíme, že pro nás jsou funkce sin a cos definovány pomocí mocniných řad 7.3. Tento přístup lze nalézt v mnoha vysokoškolských učebnicích matematiky. Taková definice je však pro použití v jiných vědách bezcenná.

Číslo π, ve střední Evropě nazývané Ludolfovo číslo[2], je spolu s Eulerovým číslem e jednou z nejvíce frekventovaných konstant matematické analýzy. I tato konstanta je iracionální.

Věta 7.2.3. *Číslo π je iracionální.*

Důkaz. Dokážeme silnější tvrzení, a to iracionálnost čísla π^2.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je zatím libovolný parametr. Položme

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}\,.$$

Pro důkaz věty využijeme tří vlastností funkce f:

1. $f(x)$ je polynom tvaru $\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, kde $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. Když $0 < x < 1$, pak $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
3. $f^{(k)}(0)$ a $f^{(k)}(1)$ jsou celá čísla pro každé $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$.

Vlastnosti 1) a 2) jsou evidentní, tvrzení 3) rozeberme:

Jelikož $f(x)$ je polynom stupně $2n$, je derivace $f^{(k)}(x) \equiv 0$ pro každé $k \geq 2n+1$. Protože 0 i 1 je n-násobným kořenem polynomu[3] $f(x)$, je $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1$. Celočíselnost $f^{(k)}(0)$ a $f^{(k)}(1)$ proto stačí dokázat pro k, kde $n \leq k \leq 2n$.

Využijeme zápisu funkce f ve tvaru z bodu 1) a k-násobným zderivováním $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ a dosazením nuly dostaneme

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k.$$

Protože c_k je celé a $k \geq n$, je číslo $f^{(k)}(0)$ celé. Pro hodnoty funkce f platí $f(x) = f(1-x)$, tedy pro derivace platí $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$, speciálně pro $x = 1$ dostaneme $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Teď k důkazu samotné věty. Tu dokážeme sporem. Nechť $\pi^2 = \frac{a}{b}$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{N}$. Položme

$$F(x) := b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f^{(2k)}(x)\,.$$

[2] Holanďan Ludolph van Ceulen (1539-1610), profesor matematiky a vojenských věd na univerzitě v Leydenu, určil číslo π s přesností na 32 desetinných míst. Na jeho počest Němci začali nazývat π Ludolfovým číslem.

[3] Využíváme snadno dokazatelné tvrzení, že když x_0 je k-násobným kořenem polynomu $p(x)$ a $k \geq 1$, pak x_0 je $(k-1)$-násobným kořenem derivace $p'(x)$.

Z předpokládaného tvaru π plyne, že $b^n \pi^{2(n-k)} \in \mathbb{N}$. Podle bodu 3) jsou $f^{(2k)}(0)$ a $f^{(2k)}(1)$ celá čísla, a proto

$$F(0), F(1) \in \mathbb{Z}\,.$$

Funkci F jsme zvolili tak, že

$$\Big(F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\Big)' = \sin(\pi x)\big(F''(x) + \pi^2 F(x)\big) = \pi^2 a^n f(x)\sin(\pi x)\,.$$

Proto

$$\pi \int_0^1 a^n f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\Big]_0^1 = F(0) + F(1) \in \mathbb{Z}\,.$$

Pro hodnotu právě počítaného integrálu podle vlastnosti 2) získáme odhady

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x < \pi \int_0^1 a^n \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}x = \pi \frac{a^n}{n!}\,. \tag{7.9}$$

Všechny naše úvahy platí pro libovolné přirozené n. Z faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \pi\frac{a^n}{n!} = 0$, plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $\pi\frac{a^n}{n!} < 1$. Dosadíme-li toto n do (7.9), dostaneme, že celé číslo $F(0)+F(1)$ leží mezi 0 a 1, a to je spor. □

7.3 Odhady faktoriálu

Pro odhad použijeme hodnotu integrálu funkce $\ln x$ spočítanou metodou per partes:

$$\int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^n - \int_1^n 1\,\mathrm{d}x = n\ln n - n + 1\,. \tag{7.10}$$

Pro interval $\langle 1, n\rangle$ zvolme ekvidistantní rozdělení $\sigma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ s normou 1. Protože funkce $\ln x$ je rostoucí, nabývá funkce $\ln x$ svého minima na levém a maxima na pravém kraji každého částečného intervalu $\langle k-1, k\rangle$. Pro horní a dolní součet funkce tedy platí

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k \;=\; S(\sigma) \;\geq\; \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x \;\geq\; s(\sigma) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)\,.$$

Využijeme toho, že logaritmus součtů je součin logaritmů a odlogaritmujeme

$$\ln n! \;\geq\; n\ln n - n + 1 \;\geq\; \ln(n-1)! \quad\Rightarrow\quad n! \;\geq\; n^n e^{-n} e \;\geq\; (n-1)!$$

Pro faktoriál jsme získali odhad

$$e\,\frac{n^n}{e^n} \;\leq\; n! \;\leq\; en\,\frac{n^n}{e^n}\,.$$

Tento odhad není vždycky postačující. Je dost hrubý, např. podíl horní a dolní meze je n, a tedy délka intervalu, ve kterem se nachází $n!$, roste nade všechny meze.

Odhad vylepšíme, když využijeme konkávnosti funkce $\ln x$. Při stejném rozdělení σ uvažujme pro každé $k = 2, 3, \ldots, n$ lichoběžník s vrcholy $(k–1, 0)$, $(k, 0)$, $(k–1, \ln(k–1))$ a $(k, \ln k)$. Jeho plocha[4] je rovna

$$\frac{\ln(k–1) + \ln k}{2}.$$

Protože je funkce konkávní, leží graf funkce nad úsečkou spojující body $(k–1, \ln(k–1))$ a $(k, \ln k)$. Proto plocha celého lichoběžníka je schovaná v ploše mezi grafem funkce a osou x vymezené hodnotami $k–1$ a k. Tedy

$$\frac{\ln(k-1) + \ln k}{2} \leq \int_{k–1}^{k} \ln x \,\mathrm{d}x \quad \text{pro každé} \;\; k = 2, 3, \ldots, n$$

Sečtením těchto nerovností a dosazením hodnoty integrálu z (7.10) dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k - \tfrac{1}{2} \ln n \;\leq\; n \ln n - n + 1 \quad\Rightarrow\quad \ln n! \;\leq\; n \ln n + \tfrac{1}{2} \ln n - n + 1\,.$$

Odlogaritmovaním získáme lepší horní odhad

$$n! \leq e\sqrt{n}\, \frac{n^n}{e^n}\,.$$

Tím jsme zmenšili rozpětí mezi horní a dolní mezí na faktor $\sqrt{n}$. S využitím konkávnosti vylepšíme i dolní mez. Uvažujme lichoběžník, jehož základnou je úsečka na ose x-ové s krajními body $(k - \frac{1}{2}, 0)$ a $(k + \frac{1}{2}, 0)$, a úhly u základny jsou pravé. Poslední stranu lichoběžníka tvoří tečna ke grafu funkce $\ln x$, v bodě $(k, \ln k)$. Víme, že každá konkávní funkce leží pod libovolnou tečnou ke grafu. Proto popsaný lichoběžník obsahuje celou plochu mezi grafem funkce $\ln x$ a osou x-ovou vymezenou body $k - \frac{1}{2}$ a $k + \frac{1}{2}$. Plocha popsaného lichoběžníka je $\ln k$. Sečteme-li tyto plochy pro $k = 2, 3, \ldots, n$, dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \,\mathrm{d}x = [x \ln x - x]_{3/2}^{n+1/2} = \big(n + \tfrac{1}{2}\big) \ln\big(n + \tfrac{1}{2}\big) - n + 1 - \tfrac{3}{2} \ln\big(\tfrac{3}{2}\big).$$

Odlogaritmovaním získáme odhad

$$n! \geq (n + \tfrac{1}{2})^{n+1/2} e^{-n}\, e \,(\tfrac{2}{3})^{3/2}.$$

[4] Lichoběžník, který u základny šířky a má dva pravé úhly a délky hran sousedících se základnou jsou b a c, má plochu rovnu $a\,\frac{b+c}{2}$.

Upravme a odhadněme jeden z výrazů na pravé straně[5],

$$\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{n+1/2} = n^{n+1/2}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\right)^{1/2} > n^{n+1/2}\sqrt{e}.$$

Celkově jsme získali odhad

$$(2e/3)^{3/2}\ \sqrt{n}\ \frac{n^n}{e^n} \quad \leq \quad n! \quad \leq \quad e\sqrt{n}\ \frac{n^n}{e^n}.$$

Ekvivalentně lze odhad přepsat do tvaru

$$\boxed{2.439522534... \doteq (2e/3)^{3/2} \quad \leq \quad \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad \leq \quad e \doteq 2.718281828....}$$

Naší metodou už lepší odhad nedostaneme. Pro zajímavost zmiňme slavnou *Stirlingovou*[6] *formuli*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad = \quad \sqrt{2\pi} \doteq 2.506628274....$$

[5]Využijeme vlastnosti Eulerova čísla: $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
[6]James Stirling (1692-1770), skotský matematik

Literatura

[1] ALIPRANTIS CH.D., BURKINSHAW O.: *Principles of Real Analysis*, Academic Press 1998.

[2] COURANT R., JOHN F.: *Introduction to Calculus and Analysis*, Springer-Verlag Berlin, 1999.

[3] ČERNÝ I.: *Úvod do inteligentního kalkulu (1000 příkladů z elementární analýzy)*, Academia, Praha 2002.

[4] ČERNÝ I., ROKYTA M.: *Differential and Integral Calculus of One Real Variable*, Karolinum, nakladatelství Univerzity Karlovy, Praha 1998.

[5] FICHTĚNGOL'C G.M.: *Kurz diferencial'nogo i integral'nogo isčislěnia*, Gosudarstvenoje Izdatěl'stvo Techniko-Teoretičeskoj Literatury, Moskva, 1951.

[6] JARNÍK V.: *Úvod do počtu diferenciálního*, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[7] JARNÍK V.: *Diferenciální počet II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1956.

[8] JARNÍK V.: *Integrální počet I*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.

[9] MULLER J.-M.: *Elementary Functions - Algorithms and Implementation*, Birkhäuser 2006.

[10] SCHWABIK Š.: *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*, Karolinum, nakladatelství Univerzity Karlovy, Praha 1999.

[11] SCHWABIK Š., ŠARMANOVÁ, P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha 1996.