Matematická analýza I

Edita Pelantová a Jana Vondráčková

katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT
Trojanova 13, 120 00 Praha

Předmluva

Skriptum je určeno studentům prvního ročníku FJFI jako učební pomůcka k přednáškám z matematické analýzy. Pokrývá látku přednášenou v zimním semestru, neobsahuje však partie, které se v úvodních přednáškách jen připomínají formou opakování středoškolské látky (např. elementy matematické logiky). Přestože je výklad doplněn ilustrujícími příklady, nemůže nahradit cvičení k přednášce. Důležitým doplňkem tohoto skripta jsou sbírky příkladů: *Cvičení z matematické analýzy* (E. Pelantová, J. Vondráčková) a *Cvičení z matematické analýzy, diferenciální počet* (J. Mareš, J. Vondráčková).

Závěrem chceme poděkovat svému kolegovi Jiřímu Pytlíčkovi za velice pečlivé přečtení rukopisu i za cenné připomínky, které pomohly zvýšit úroveň textu.

Praha, květen 2004 Autorky

Seznam použitých symbolů

$\in$	symbol pro příslušnost prvku k množině
$\cap$, $\cup$	průnik, resp. sjednocení množin
$\subset$	podmnožina
$\exists$	existenční kvantifikátor
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\sum$	součet
$\prod$	součin
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\overline{\mathbb{C}}$	rozšířená množina komplexních čísel
$\hat{n}$	množina čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je přirozené číslo
$\emptyset$	prázdná množina
$[x]$	celá část čísla x
nsd	největší společný dělitel
$:=$, $=:$	rovnost definující nový objekt
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Množiny

Pojem množina hraje důležitou roli v každé oblasti moderní matematiky. Ačkoliv se zdá jednoduché a přirozené definovat množinu jako souhrn objektů, vede zcela svobodné a bezuzdné používání této definice k různým podivným situacím, tzv. paradoxům. Z toho důvodu ponecháme tento pojem nedefinovaný (stejně tak je tomu v geometrii s pojmy bod a přímka) a budeme množiny popisovat jednoduše jejich vlastnostmi. V přednášce z matematické analýzy budeme používat hlavně čísla z konkrétních "malých"množin (jako jsou reálná a komplexní čísla) a vyhneme se konstruování "velkých"množin, které mohou vést ke zmíněným problémům.

Množiny budeme označovat zpravidla pomocí písmen velké abecedy: $A, B, C, \dots, Y, Z$ a pod., a prvky, nazývané též elementy množin, budeme značit většinou malými písmeny latinské i řecké abecedy: $a, b, \dots, m, n, \dots, x, y, \dots \alpha, \beta, \gamma, \dots \psi, \xi, \dots, \omega$.[1]

Skutečnost, že množina M obsahuje prvek x, se označí pomocí symbolu $\in$ (což je stylizované řecké písmeno ε - epsílon); $x \in M$ čteme "x (je) prvkem M".

Množina s prvky 1, 37 a 55 se zapíše $\{1, 37, 55\}$. Zápisy $\{37, 55, 1\}$ a $\{1, 37, 1, 55, 55, 1\}$

[1]Řecká abeceda neboli alfabeta je souhrnný název 24 znaků řecké abecedy. V Řecku se jí začalo užívat v 9.-8. stol. před n.l., asi 300 let po pádu mykénské civilizace. Podle Hérodota zavedl v Řecku alfabetu Kadmos, který ji prý převzal od Foiníčanů. Semitský původ alfabety se dnes pokládá za nesporný. V semitských písmech se však vyznačují jen souhlásky; jen Aramejci používali v některých případech souhláskových znaků pro označení samohlásek. Řekové tuto praxi přejali a užívali soustavně a důsledně jako znaků pro samohlásky některých písmen semitských, která byla pro řečtinu nadbytečná. V Řecku původně neexistovala jednotná alfabeta. Tyto rozdíly časem zanikaly a postupně byla přejímána alfabeta, jíž se původně užívalo v Iónii. Tento vývoj byl uzavřen na konci 5. st. př.n.l. Jednotlivé znaky měly pak tento význam:
α = a[lfa], β = b[eta], γ = g[ama], δ = d[elta], ε = e[psílon], ζ = z[éta], η = é[ta], ϑ = th[éta], ι = i[óta], κ = k[apa], λ = l[ambda], μ = m[ý], ν = n[ý], ξ = ks[í], o = o[míkron], π = p[í], ρ = r[hó], σ = s[ígma], τ = t[au], υ = ý[psilon], φ = f[í], χ = ch[í], ψ = ps[í], ω = ó[mega].
Kromě malých písmen řecké abecedy budeme používat i některá velká písmena: Γ = gama, Δ = delta, Θ = théta, Λ = lambda, Ξ = ksí, Π = pí, Σ = sígma, Φ = fí, Ψ = psí, Ω = ómega.

znamenají všechny totéž, tedy vícenásobný výskyt téhož prvku se ignoruje, týž prvek se nemůže v jedné množině vyskytnout dvakrát. Tři tečky v zápisu množiny $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ znamenají ovšem "a dále podobně, podle stejné zákonitosti", t.j. v uvedeném případě jde o množinu všech sudých přirozených čísel. Příslušná zákonitost by ovšem měla být na první pohled patrná.

Složitější a zajímavější množiny se zpravidla tvoří výběrem prvků již známé množiny pomocí nějakého pravidla. Množinu všech druhých mocnin přirozených čísel bychom mohli zapsat například

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{nebo také} \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(k^2 = n)\} \ .$$

Obecně budeme množiny všech prvků $x \in M$, pro které je pravdivá výroková forma $A(x)$, zapisovat ve tvaru $\{x \in M \mid A(x)\}$. V případě, že M značí množinu všech x, která lze do výrokové formy dosazovat, budeme používat i značení $\{x \mid A(x)\}$.

Dvě množiny A a B jsou stejné, zapsáno $A = B$, když A a B mají stejné prvky. Množina A se nazývá podmnožina množiny B, zapsáno $A \subset B$, když každý prvek množiny A je obsažen v množině B. Zřejmě $A = B$, když současně platí $A \subset B$ a $B \subset A$. Když $A \subset B$ a $A \neq B$, nazýváme A vlastní podmnožinou množiny B. Důležitá je množina neobsahující žádný prvek. Taková množina existuje pouze jedna a je zvykem ji značit $\emptyset$ a nazývat prázdná množina. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Teď ještě připomeneme běžně používané operace s množinami a jejich vlastnosti:

Když A a B jsou dvě množiny, definujeme

- sjednocení $A \cup B$ množin A a B

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\};$$

- průnik $A \cap B$ množin A a B

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ a } x \in B\};$$

- rozdíl $A \backslash B$ množin A a B

$$A \backslash B = \{\, x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Množiny A a B nazývame disjunktní, když $A \cap B = \emptyset$. Zvětšené symboly $\bigcup$ a $\bigcap$ se používají podobně jako symboly $\sum$ a $\prod$. Jsou-li tedy $A_1, \dots, A_n$ množiny, můžeme jejich sjednocení napsat

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

a podobně pro průnik. Uvědomme si, že tento zápis je možný jen díky tomu, že operace sjednocení a průniku množin jsou asociativní. Jinými slovy, že pro každou trojici množin A, B, C platí

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad \text{a} \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

V důsledku toho nezávisí na způsobu "uzávorkování"sjednocení tří, a obecně n, množin. Operace $\cup$ a $\cap$ jsou ovšem i komutativní, neboli splňují vztahy

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{a} \qquad A \cup B = B \cup A\ .$$

Komutativita a asociativita operací je ještě doplněná jejich distributivitou:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{a} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Důkazy zmíněných vztahů jsou pouze jednoduchým použitím definic a distributivity logických spojek "a", "nebo". Ilustrujme to na poslední rovnosti.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in A \text{ nebo } x \in B \cap C \Longleftrightarrow x \in A \text{ nebo } (x \in B \text{ a } x \in C) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \cup B \text{ a } x \in A \cup C \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Mnohem názornější je důkaz pomocí Vennova diagramu pro příslušné tři množiny.

1.2 Relace

Jestliže x a y jsou prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro uspořádanou dvojici prvků x a y. Definujeme:

$$(x, y) = (z, t), \quad \text{právě když} \quad x = z \text{ a } y = t.$$

A zcela analogicky definujeme i uspořádanou n-tici prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$, již označujeme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definice 1.2.1. Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Formálně zapsáno

$$A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A,\ y \in B \,\}.$$

$A \times B$ se nazývá kartézský součin množin A a B.

Název "kartézský součin"pochází z geometrické interpretace (a původně tedy jména Descartes[2]): Když např. $A = B = \mathbb{R}$, potom $A \times B$ můžeme interpretovat jako všechny body roviny, a v tomto případě x a y jsou kartézské souřadnice bodu (x, y). Kartézský součin $A \times A$ někdy zapisujeme jako mocninu, t.j. A^2, a podobně $A^3 = A \times A \times A$ atd.

Definice 1.2.2. Relace mezi množinami A a B je libovolná podmnožina $\mathcal{R}$ kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, mluvíme o relaci na A. Náleží-li dvojice (x, y) relaci $\mathcal{R}$, t.j. $(x, y) \in \mathcal{R}$, říkáme také, že x a y jsou v relaci $\mathcal{R}$, a zapisujeme též $x\mathcal{R}y$.

Příklad 1.2.3. Množinu všech podmnožin množiny A označíme $\mathcal{P}(A)$. Této množině se také říká potenční množina, proto písmeno $\mathcal{P}$ v označení. Na $\mathcal{P}(A)$ zavedeme relaci $\mathcal{R}_1$ takto

$$X\mathcal{R}_1 Y \iff X \subset Y.$$

Příklad 1.2.4. Řekneme, že přímky p a q v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_2$, když p a q jsou rovnoběžné.

Příklad 1.2.5. Řekneme, že přímky p a q v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_3$, když p a q jsou na sebe kolmé.

Příklad 1.2.6. Na množině studentů FJFI zavedeme relaci podle data jejich narození. Řekneme, že dva studenti jsou v relaci $\mathcal{R}_4$, jestliže mají narozeniny ve stejný den.

Příklad 1.2.7. Na množině $\mathbb{N}$ definujeme relaci $m\mathcal{R}_5 n$, když m dělí n.

Jak vidíme, relace v sobě může zahrnovat vztahy mezi různými objekty. Mezi nejdůležitější relace používané v matematice patří relace ekvivalence a uspořádání.

Definice 1.2.8. Řekneme, že relace $\mathcal{R}$ na množině M je ekvivalence, když má následující tři vlastnosti

- pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$ (reflexivita)
- kdykoliv $x\mathcal{R}y$, pak i $y\mathcal{R}x$ (symetrie)
- ze vztahů $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$ plyne $x\mathcal{R}z$ (tranzitivita)

Podívejme se, které relace z příkladů 1.2.3 - 1.2.7 jsou ekvivalence. Snadno nahlédneme, že
– relace $\mathcal{R}_1$ není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní;
– relace $\mathcal{R}_2$ je ekvivalencí;

[2]René Descartes nebo Cartesius (1596-1650), významný francouzský filozof a matematik, zakladatel analytické geometrie

– relace $\mathcal{R}_3$ není ekvivalencí, protože není ani reflexivní ani tranzitivní, je ale symetrická;
– relace $\mathcal{R}_4$ je ekvivalencí;
– relace $\mathcal{R}_5$ není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitvní a reflexivní.

Pojem ekvivalence je zastřešující pojem pro všechny pojmy vyjadřující stejnost, podobnost, izomorfii. Relace ekvivalence se zpravidla značí znaky $\equiv, \sim, \approx, =$ a podobně.

Nechť $\mathcal{R}$ je ekvivalence na množině M a x libovolný prvek M. Označme $\mathcal{R}[x]$ množinu všech prvků y, které jsou ekvivalentní s x. $\mathcal{R}[x]$ se nazývá třída ekvivalence určená prvkem x. Platí následující tvrzení:

Pro každé dva prvky x, y množiny M buď $\mathcal{R}[x] = \mathcal{R}[y]$, nebo $\mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[y] = \emptyset$.

To umožňuje napsat množinu M jako sjednocení disjunktních tříd ekvivalence. Např. množinu všech studentů FJFI lze rozdělit podle ekvivalence $\mathcal{R}_4$ do disjunktních množin takto: ti, co slaví narozeniny 1.ledna by byli v jedné třídě, ti, co slaví 2. ledna v další, atd.

Jiným důležitým typem relace je uspořádání, obvykle značené symbolem $\leq$ nebo $\preceq$.

Definice 1.2.9. Relace $\leq$ na množině M se nazývá uspořádání, když má následující tři vlastnosti:

- pro každé $x \in M$ platí $x \leq x$ (reflexivita)
- jestliže $x \leq y$ a $y \leq x$, pak $x = y$ (antisymetrie)
- jestliže $x \leq y$ a $y \leq z$, pak $x \leq z$ (tranzitivita)

Mezi relacemi z příkladů 1.2.3-1.2.7 pouze $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_5$ jsou uspořádání. Při uspořádnání na $\mathbb{N}$ podle dělitelnosti snadno najdeme dvojici prvků, např. 3 a 5, že ani 3 není v relaci s 5, ani 5 není v relaci s 3. Podobná situace nastane i při $\mathcal{R}_1$. Podívejme se na jiné uspořádání na množině $\mathbb{N}$, a to uspořádání přirozených čísel podle velikosti. Při tomto uspořádání pro každý pár $m, n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq n$ nebo $n \leq m$. Takové uspořádání nazýváme úplným.

1.3 Zobrazení

Definice 1.3.1. Zobrazení množiny A do množiny B je relace $f \subset A \times B$, splňující dodatečnou podmínku, že pro každý prvek $x \in A$ existuje jediný prvek $y \in B$ tak, že xfy. To, že f je zobrazení množiny A do množiny B, zapisujeme

$$f : A \mapsto B \; .$$

Pro zobrazení se ovšem nepoužívá značení zavedeného pro relace. Je-li $f \subset A \times B$ relací, která je zobrazením, $f(x)$ označuje to jediné $y \in B$, pro něž xfy. Říkáme, že prvku x je přiřazen prvek $y = f(x)$; y nazýváme též hodnota zobrazení f v bodě x nebo obraz prvku x při zobrazení f. Prvku x říkáme vzor prvku y při zobrazení f.[3] Množina A se nazývá **definiční obor** zobrazení f a také značí D_f. Množina obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí H_f. Obor hodnot lze také formálně zapsat

$$H_f = \{\, y \in B \,|\, \exists x \in A,\ y = f(x) \,\} \ .$$

Říkáme, že dvě zobrazení $f : A \mapsto B$ a $g : A \mapsto B$ se rovnají, zapsáno $f = g$, když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A$. Rovnat se tedy mohou jenom zobrazení se stejným definičním oborem A.

V matematické analýze budeme pracovat se zobrazeními, kde obrazy i vzory budou reálná čísla. Takovým zobrazením se říká funkce. Funkce budou nejčastěji zadávané předpisem, jak k číslu x určit jeho obraz, číslo y. Např.

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

Nevymezíme-li hodnoty x, kterým předpis má přiřadit obraz, budeme automaticky za přirozený definiční obor považovat všechna x, pro která má použití předpisu smysl. V našem případě je $D_f = \langle 1, 2) \cup (2, +\infty)$. Někdy se lze setkat i se zápisem zobrazení

$$f : (A) \mapsto B \ .$$

Uzávorkování množiny A znamená, že předpis pro výpočet $f(x)$ nemusí mít smysl pro všechny prvky z A. V tomto případě je nutné najít přirozený definiční obor $D_f \subset A$.

Předpis pro zadání zobrazení může mít i tvar

$$\text{"}x \text{ přiřaď } y \text{ tak, aby platilo } y^5 + y = x^2 \text{ "}$$

nebo

"číslu x přiřaď číslo 1, když v desítkovém zápisu čísla x se za desetinnou tečkou od nějakého místa vyskytuje 100 po sobě jdoucích nul, v opačném případě přiřaď číslu x číslo 0".

Těžko říct, zda někdo ze smrtelníků ví, co toto pravidlo přiřadí číslu π. Nicméně i

[3] Označení x pro vzor, resp. pro neznámou v rovnici pochází ze španělského písmene x, které se četlo jako š, a byla to zkratka arabského slova šaj (věc). Právě aritmetika se do středověké Evropy dostala prostřednictvím arabských učenců.

tento předpis definuje zobrazení [4].

Předtím než zavedeme další užitečné pojmy, definujeme dvě zobrazení, na kterých budou tyto pojmy ilustrovány:

Příklad 1.3.2.

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad\qquad f_2(x) = \sqrt{|x|}.$$

Přirozeným definičním oborem D_{f_1} je interval $\langle 0, +\infty)$, kdežto $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

- Zobrazení $h : M \cap A \mapsto B$ je **zúžením zobrazení** $f : A \mapsto B$ na množinu M, když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in M \cap A$. Symbolicky zapisujeme $h = f/_M$.

  Pro funkce z příkladu 1.3.2 platí $f_1 = f_2/_{\langle 0,+\infty)}$.

- **Obraz množiny** M při zobrazení $f : A \mapsto B$ je množina

  $$f(M) = \{\, y \in B \,|\, (\exists x \in M)\ (y = f(x)) \,\},$$

  což lze taky zapsat $\quad f(M) = \{\, f(x) \,|\, x \in M\}.$

  Obor hodnot tedy není nic jiného, než obraz definičního oboru při zobrazení f, tj. $H_f = f(D_f)$.
  Je-li množina $M = (-2, -1\rangle$, pak $f_1(M) = \emptyset$ a $f_2(M) = \langle 1, \sqrt{2})$.

- **Vzor množiny** M při zobrazení $f : A \mapsto B$ je

  $$f^{-1}(M) = \{\, x \in A \,|(\exists y \in M)\ (y = f(x)) \,\},$$

  což lze taky zapsat $\ f^{-1}(M) = \{\, x \in A \,| f(x) \in M \,\}.$

  Pro $M = (2, 3)$ je $f_1^{-1}(M) = (4, 9)$ a $f_2^{-1}(M) = (-9, -4) \cup (4, 9)$.

Definice 1.3.3. Jsou-li $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$ zobrazení, potom můžeme definovat nové zobrazení $h : A \mapsto C$ předpisem $h(x) = g(f(x))$. Toto zobrazení se nazývá **složení** zobrazení g a f a značí se $g \circ f$. Platí tedy

$$\big(g \circ f\big)(x) = g(f(x)).$$

[4] Pojem funkce je základním pojmem matematické analýzy. Trvalo dlouho, než se dospělo k dnešnímu chápání funkce (jakožto speciálního typu relace); například v době, kdy byl objeven diferenciální počet, musela být "poctivá" funkce vyjádřena nějakou formulí jako např. $f(x) = \sqrt{\sin(x/\pi)}$. To, že reálná funkce může přiřazovat každému číslu nějaké zcela libovolné číslo, je celkem moderní vynález.

Uvažujme zobrazení $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ daná předpisy

$$f(x) = \sin x \qquad \text{a} \qquad g(x) = x^2.$$

Složení $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ a $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$ jsou dvě různá zobrazení, například proto, že obor hodnot $f \circ g$ je interval $\langle -1, 1 \rangle$, zatímco obor hodnot $g \circ f$ je pouze interval $\langle 0, 1 \rangle$. Tento příklad ukazuje, že obecně

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Skládání zobrazení tedy není komutativní. Snadno se však přesvědčíme, že je asociativní, t.j.

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

pro každá tři zobrazení s definičními obory umožňujícími toto skládání.

Definice 1.3.4. (Důležité druhy zobrazení) Zobrazení $f : A \mapsto B$ nazýváme

- **injektivní** (neboli prosté) zobrazení, jestliže pro každou dvojici různých proměnných $x, y \in A$ je $f(x) \neq f(y)$,
- **surjektivní** zobrazení (neboli zobrazení na B), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$,
- **bijektivní** (neboli vzájemně jednoznačné) zobrazení, jestliže f je injektivní a surjektivní.

Tyto pojmy lze přeformulovat i jiným způsobem. Např. zobrazení f je prosté, jestliže vzor každé jednoprvkové množiny $\{b\} \subset B$ je nanejvýš jednoprvková množina.
Zobrazení f je zobrazení na B, pokud vzor každé jednoprvkové množiny $\{b\} \subset B$ je alespoň jednoprvková množina, nebo ještě jinak, pokud $H_f = B$.

Zobrazení množiny A do stejné množiny A, které prvku x přiřazuje sama sebe, nazýváme **identické** zobrazení na množině A, nebo identita na A a značíme Id_A. Identita je zřejmě zobrazení, které je bijektivní.

$$Id_A : A \mapsto A, \qquad Id_A(x) = x.$$

Definice 1.3.5. Je-li $f : A \mapsto B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny A tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f.

Jak už bylo řečeno, při prostém zobrazení f je vzorem jednoprvkové množiny $\{x\} \subset H_f$ opět jednoprvková množina $f^{-1}(\{x\})$. A právě inverzní zobrazení přiřazuje prvku $x \in H_f$ jediný prvek $y \in f^{-1}(\{x\})$. Proto je zvykem značit obraz při inverzním zobrazení jako $y = f^{-1}(x)$, aniž by docházelo k omylům.

Vlastnosti inverzního zobrazení:

$$D_{f^{-1}} = H_f \ , \qquad H_{f^{-1}} = D_f .$$

$$f^{-1} \circ f = Id_{D_f} \ , \qquad f \circ f^{-1} = Id_{H_f} .$$

1.4 Ekvivalence množin

Definice 1.4.1. Řekneme, že množina A je **ekvivalentní** s množinou B, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Symbolicky zapisujeme $A \sim B$.

Poznamenejme, že relace $\sim$ mezi množinami má skutečně vlastnosti ekvivalence 1.2.8.

1. $A \sim A$, protože za bijektivní zobrazení $f : A \mapsto A$ stačí vzít $f = Id_A$.
2. Když $A \sim B$, pak $B \sim A$, neboť je-li $f : A \mapsto B$ bijektivní, je také $f^{-1} : B \mapsto A$ bijekce.
3. $A \sim B$ a $B \sim C$ implikuje $A \sim C$, jelikož složením dvou bijekcí $f : A \mapsto B$ a $g : B \mapsto C$ dostaneme bijekci $g \circ f : A \mapsto C$.

O ekvivalentních množinách říkáme, že mají **stejnou mohutnost**[5].

Definice 1.4.2. Řekneme, že množina A je

- **konečná**, když $A = \emptyset$ nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \sim \hat{n}$,
- **spočetná**, když A je ekvivalentní s $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, když není konečná ani spočetná.

Poznámka. K neprázdné konečné množině A je číslo n přiřazené jednoznačně, nazýváme je **počet prvků** množiny A.

[5] Otázku existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinami začal jako první zkoumat německý matematik Georg Cantor (1845-1918), který je zakladatelem moderní teorie množin.

Poznámka. Bijekce f přiřadí prvkům spočetné množiny A postupně všechna přirozená čísla. Říkáme proto, že prvky spočetné množiny lze očíslovat všemi přirozenými čísly. Spočetnou množinu A často zapisujeme ve tvaru $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Poznámka. Nejvýše spočetná se nazývá množina, která je konečná nebo spočetná. Množina, která není konečná, se nazývá nekonečná.

Příklad 1.4.3. Ukážeme, že $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Stačí ověřit, že následující zobrazení je bijekce mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

Věta 1.4.4. *Každá nekonečná podmnožina množiny přirozených čísel je spočetná.*

Důkaz. Nechť $B \subset \mathbb{N}$, B nekonečná. Definujme:

$$f(1) = \min B, \quad f(2) = \min\bigl(B - \{f(1)\}\bigr), \quad f(3) = \min\bigl(B - \{f(1), f(2)\}\bigr), \quad \text{atd.}$$

Protože B je nekonečná, lze $f(n)$ definovat pro každé n. Připomeňme, že využíváme podstatně tzv. **principu dobrého uspořádání** množiny $\mathbb{N}$, který říká, že každá neprázdná podmožina množiny $\mathbb{N}$ má minimum. Snadno ověříme, že f je bijekce $f : \mathbb{N} \mapsto B$. □

Důsledek 1.4.5. *Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

Důkaz. Nechť A je spočetná množina a C její nekonečná podmnožina. Uvažujme bijekci $f : A \mapsto \mathbb{N}$. Obraz nekonečné množiny C při prostém zobrazení f je zase nekonečná množina $f(C) \subset \mathbb{N}$. Podle předchozí věty je $f(C) \sim \mathbb{N}$. Protože zúžení $f/_C$ je bijekce mezi množinou C a $f(C)$ je $C \sim f(C) \sim \mathbb{N}$. □

Příklad 1.4.6. Množina přirozených čísel dělitelných číslem 2 a 3 a už žádným jiným prvočíslem má tvar $\mathcal{M} = \{2^k 3^j \mid k, j \in \mathbb{N}\}$. Tato množina je nekonečnou podmnožinou množiny přirozených čísel, a proto

$$\mathcal{M} = \{2^k 3^j \mid k, j \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}.$$

Věta 1.4.7. *1.* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, *2.* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Důkaz. 1. Stačí ověřit, že zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \{2^k 3^j \mid k, j \in \mathbb{N}\}$ dané předpisem $f(k, j) = 2^k 3^j$ je bijektivní, a využít předchozí příklad 1.4.6.

2. Každý prvek z $\mathbb{Q}$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a čísla p, q jsou nesoudělná. Přiřazení

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} (2p+1, q) & \text{pro } p \geq 0 \\ (2|p|, q) & \text{pro } p < 0 \end{cases}$$

zobrazuje prostě množinu $\mathbb{Q}$ na nekonečnou podmnožinu $f(\mathbb{Q})$ spočetné množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Podle důsledku 1.4.5 je $f(\mathbb{Q})$ spočetná. Protože je zobrazení f prosté, je $f(\mathbb{Q}) \sim \mathbb{Q}$. $\square$

Věta 1.4.8. *Sjednocení spočetné a nejvýše spočetné množiny je množina spočetná.*

Důkaz. Nechť $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ a $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ jsou obě spočetné množiny.
1. Nejdříve ukážeme, že sjednocení dvou spočetných disjunktních množin je spočetné. Když A a B jsou disjunktní, tj. $A \cap B = \emptyset$, pak zobrazení

$$f(n) = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & \text{pro } n \text{ sudé} \\ b_{\frac{n+1}{2}} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

je bijekcí mezi $A \cup B$ a $\mathbb{N}$.
2. Když $A \cap B \neq \emptyset$, využijeme toho, že $A \cup B$ lze zapsat jako sjednocení disjunktních množin $A \cup (B - A)$. V případě, že $B - A$ je nekonečná, je spočetná, a tedy podle bodu 1. je sjednocení spočetné.
V případě, že $B - A$ je konečná neprázdná, tj. $B - A = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ pro nějaké přirozené k, definujeme bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $A \cup B$ takto:

$$f(n) = \begin{cases} c_n & \text{pro } n \leq k \\ a_{n-k} & \text{pro } n > k. \end{cases}$$

Případ $A - B = \emptyset$, tj. $A \cup B = B$, je triviální.
Důkaz věty v případě, kdy je A spočetná a B konečná je analogií předchozího. $\square$

Následující věta ukazuje, že ani sjednocením spočetně mnoha spočetných množin nedostaneme jinou množinu, než spočetnou.

Věta 1.4.9. *Nechť pro každé $i \in \mathbb{N}$ je A_i spočetná množina. Pak sjednocení $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je spočetná množina.*

Důkaz. Protože množiny A_i jsou spočetné pro každé $i \in \mathbb{N}$, lze libovolnou množinu A_i zapsat jako

$$A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \ldots\}.$$

Příslušnost prvku x ke sjednocení $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ znamená, že k x existuje pár indexů $i, j \in \mathbb{N}$ tak, že $x = a_j^{(i)}$. Takových párů i, j může existovat k jednomu x i více (dokonce i nekonečně mnoho), protože množiny, které uvažujeme pro sjednocení, nemusí být disjunktní. Definujme zobrazení

$$x \mapsto f(x) = \min\{2^i 3^j \mid x = a_j^{(i)}\}.$$

Pro definici $f(x)$ jsme opět využili princip dobrého uspořádání. Snadno se přesvědčíme, že definované f je bijekce mezi sjednocením a spočetnou množinou $\{2^i 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Nyní ukážeme, že ne všechny nekonečné množiny jsou spočetné.

Věta 1.4.10. *Množina všech zobrazení množiny* $\mathbb{N}$ *do dvouprvkové množiny* $\{0, 1\}$ *je nespočetná.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že množina F zmíněných zobrazení je spočetná, je tedy tvaru $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$. Zkoumejme zobrazení g definované předpisem

$$g(n) = 1 - f_n(n) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Protože $g : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}$, je $g \in F$, současně ale g se nerovná žádnému prvku f_n z množiny F (protože g a f_n mají různé funkční hodnoty v bodě n), což je ve sporu. □

Poznámka. Zcela obdobným trikem (nazývaným Cantorovo diagonální schéma) lze ukázat, že interval $(0, 1)$ je nespočetný. Představme si každé číslo $x \in (0, 1)$ zapsané v desítkovém rozvoji, jako $x = 0.x_1x_2x_3\dots$, kde x_i jsou číslice od 0 do 9. Je-li x racionální, mohou být všechny číslice x_i od jistého indexu i nulové. Kdyby prvky intervalu $(0, 1)$ bylo možné očíslovat přirozenými čísly, pak

$$(0, 1) = \{x^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}, \;\; x^{(i)} = 0.x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}\dots\}.$$

Číslo $y = 0.y_1y_2y_3\dots$ definované předpisem

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{když } x_i^{(i)} \neq 1 \\ 2, & \text{když } x_i^{(i)} = 1 \end{cases}$$

se nemůže rovnat žádnému z čísel $x^{(i)}$ a přitom patří do intervalu $(0, 1)$, opět spor.

Následující věta ukazuje, že ubráním ani přidáním spočetné množiny neovlivníme mohutnost nespočetné množiny.

Věta 1.4.11. *Nechť* A *je nespočetná a* B *spočetná množina. Pak*

$$(A \cup B) \sim A \qquad \text{a} \qquad (A - B) \sim A$$

Nejdříve si dokážeme pomocné tvrzení:

Lemma 1.4.12. *Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.*

Důkaz lemmatu. Nechť C je nekonečná množina. Spočetnou množiny $D = \{d_1, d_2, d_3 \dots\}$ konstruujeme takto: prvek d_1 vybereme libovolně z C, d_2 vybereme libovolně z množiny $C - \{d_1\}$, obecně prvek d_n vybereme libovolně z množiny $C - \{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$. Nekonečnost množiny C zaručuje, že výběr d_n lze provést pro každé přirozené n.

Důkaz věty. Nechť C je spočetná podmnožina A. Protože $A \cup B = A \cup (B - A)$ budeme uvažovat bez újmy na obecnosti sjednocení dvou disjunktních množin $A \cup (B - A)$. Množina $(B - A)$ je nejvýše spočetná. Sjednocení spočetné a nejvýše spočetné množiny C a $(B - A)$ je opět spočetné (podle věty 1.4.8), a proto existuje bijekce $g : C \mapsto C \cup (B - A)$. Nyní stačí definovat zobrazení $f : A \mapsto (A \cup B)$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{když } x \in A - C \\ g(x), & \text{když } x \in C. \end{cases}$$

Snadno ověříme, že f je bijektivní zobrazení.

Pro důkaz druhé části věty si nejdříve uvědomíme, že $A - B$ je nespočetná množina. Kdyby totiž $A - B$ byla spočetná nebo konečná, pak sjednocení $(A - B) \cup B = A \cup B$ by bylo spočetné - spor s už dokázaným tvrzením. Teď už stačí aplikovat první část věty na nespočetnou množinu $A - B$ a spočetnou množinu B. Dostáváme $A \sim (A \cup B) = (A - B) \cup B \sim (A - B)$. $\square$

Další dvě poznámky této kapitoly uvádíme jen pro zajímavost.

Poznámka. Komplexní číslo, které je kořenem nenulového polynomu s racionálními koeficienty, se nazývá **algebraické číslo**.

Příkladem algebraického čísla je $\sqrt{2}$. Lze ukázat, že množina algebraických čísel $\mathbb{A}$ je spočetná. Stačí si uvědomit, že polynomů stupně $\leq n$ je spočetně mnoho, a každý z nich má maximálně n kořenů. Tedy množina A_n algebraických čísel, které jsou kořeny polynomů stupně $\leq n$, je spočetná. Protože $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, je množina algebraických čísel spočetná.

To ale znamená, že $(\mathbb{R} - \mathbb{A}) \sim \mathbb{R}$. Tedy podařilo se nám celkem bezpracně dokázat, že existují reálná čísla, která nejsou kořeny žádného polynomu, a dokonce jsme dokázali, že podstatná část reálných čísel není algebraická.

Poznámka. Zkusme odpovědět na otázku, jak "velká" může být množina. Potřebujeme k tomu další definici. Řekneme, že $A \preceq B$, když existuje prosté zobrazení $f : A \mapsto B$; jinými slovy $A \preceq B$, když A je ekvivalentní s nějakou podmnožinou B. Můžeme tedy říkat, že "B má alepsoň tolik prvků co A". Relace $\preceq$ splňuje tyto následující vlastnosti:

1. $A \preceq A$ pro každou množinu A.
2. Když $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.
3. Když $A \preceq B$ a $B \preceq A$, pak $A \sim B$.

Důkaz (1) a (2) je jednoduchý. Tvrzení (3) je známé pod názvem Schröderova-Bernsteinova věta.

Cantor ukázal, že potenční množina $\mathcal{P}(A)$ množiny A má vždycky více elementů než A.

Formálně:

$$\textit{Pro libovolnou množinu } A \textit{ platí} \quad A \preceq \mathcal{P}(A) \quad \text{a} \quad A \not\sim \mathcal{P}(A).$$

Důkaz není složitý. Když $A = \emptyset$, pak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme proto, že $A \neq \emptyset$. Definujme $f : A \mapsto \mathcal{P}(A)$ předpisem $f(x) = \{x\}$ pro každé $x \in A$. Vidíme, že f je prosté. Proto $A \preceq \mathcal{P}(A)$.

Předpokládejme nyní, že $A \sim \mathcal{P}(A)$. Existuje tedy bijekce $g : A \mapsto \mathcal{P}(A)$. Uvažujme podmnožinu B množiny A definovanou $B = \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$. Protože g je "na", existuje $a \in A$ takové, že $g(a) = B$. Takové a splňuje podmínku $a \in B \Leftrightarrow a \notin B$, což je spor.

Slavná **hypotéza kontinua** říká, že neexistuje množina A taková, aby $\mathbb{N} \preceq A \preceq \mathbb{R}$ a současně $\mathbb{N} \not\sim A$, $\mathbb{R} \not\sim A$. Bylo dokázáno, že tato hypotéza je "nezávislá"na obvyklých axiomech teorie množin. Existují modely množin, kde hypotéza kontinua platí a modely, kde neplatí.

Kapitola 2

Číselné množiny

2.1 Množina reálných čísel

Nejdůležitější množinou matematické analýzy je množina reálných čísel $\mathbb{R}$. I když není naším cílem podat podrobný popis axiomatické výstavby reálných čísel, je důležité si uvědomit, které axiomy charakterizují reálná čísla. Jsou to axiomy tělesa, axiomy uspořádání a axiom úplnosti. V terminologii algebry je množina $\mathbb{R}$ jediným úplným uspořádaným tělesem. Tento název pochází z axiomatických základů reálných čísel, jak si je teď uvedeme.

Reálná čísla jsou prvky neprázdné množiny $\mathbb{R}$ spolu se dvěma operacemi $+$ a $.$ množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ nazývanými sčítání a násobení, které splňují následující axiomy:

Axiomy tělesa

Písmena x, y a z označují libovolná reálná čísla, pokud není řečeno jinak.

Axiom 1. $x + y = y + x$ a $xy = yx$ (komutativní zákon).

Axiom 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ a $(xy)z = x(yz)$ (asociativní zákon).

Axiom 3. $x(y + z) = xy + xz$ (distributivní zákon).

Axiom 4. Existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že $x + 0 = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Axiom 5. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje prvek v $\mathbb{R}$ (označovaný jako $-x$) takový, že $x + (-x) = 0$.

Axiom 6. Existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$ různý od 0 takový, že $1.x = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Axiom 7. Pro každé $x \neq 0$ existuje prvek v $\mathbb{R}$ (označovaný jako x^{-1}) takový, že $xx^{-1} = 1$.

Z těchto axiomů lze ukázat, že nulový prvek z Axiomu 4 je určen jednoznačně. Jednoznačně je daný i opačný prvek $-x$ z Axiomu 5. Stejně tak jednoznačně je určen i inverzní prvek x^{-1}. Z axiomů tělesa lze snadno odvodit známé vlastnosti reálných čísel, např. $0.x = 0$, $-(-x) = x$, $(-x)(-y) = xy$, $(x^{-1})^{-1} = x$ atp., viz dodatek k této kaptiole.

Kromě požadavku, aby $\mathbb{R}$ bylo těleso, chceme, aby $\mathbb{R}$ bylo uspořádané těleso. To znamená, že na $\mathbb{R}$ je definovaná relace uspořádání $\leq$ splňující následující axiomy:

Axiomy uspořádání

Axiom 8. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

Axiom 9. Když $x \leq y$, pak $x + z \leq y + z$ pro každé $z \in \mathbb{R}$.

Axiom 10. Když $x \leq y$ a $0 \leq z$, pak $xz \leq yz$.

Zápisy $x \geq y$ a $y \leq x$ považujeme za stejné. Číslo x splňující $x \leq 0$, $x \neq 0$, nazýváme záporným a značíme $x < 0$. Podobně číslo $x \geq 0, x \neq 0$, nazýváme kladným a zapisujeme $x > 0$. Lze ukázat (viz dodatek), že při uspořádání na $\mathbb{R}$, které vyhovuje axiomům 8-10, už např. nutně platí $0 < 1$.

Definujme obvyklým způsobem absolutní hodnotu reálného čísla.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{pro} \quad a < 0. \end{cases}$$

Snadno se užitím Axiomů 1-10 dokáže, že absolutní hodnota čísla je nezáporná, a že jedině 0 má absolutní hodnotu rovnou 0. Rovněž budeme využívat, že

- $|ab| = |a|.|b|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ - tzv. trojúhelníková nerovnost.

Číslo $|a - b|$ geometricky představuje vzdálenost mezi čísly a a b.

Než se dostaneme k poslednímu axiomu reálných čísel, potřebujeme několik definic.

Definice 2.1.1. Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená shora**, když

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq K).$$

Každé takové K nazýváme **horní závora** množiny A, množinu všech horních závor množiny A značíme A^*.

Když množina A není shora omezená, je $A^* = \emptyset$. Když ale A^* obsahuje nějaké reálné číslo K, pak obsahuje i každé $K' > K$, proto je pro shora omezenou množinu A množina horních závor A^* nekonečná.

Definice 2.1.2. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo $a \in A$ je maximem množiny A (značíme $a = \max A$), když

$$(\forall x \in A)(x \leq a).$$

Definice 2.1.3. Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená zdola**, když

$$(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(H \leq x).$$

Každé takové H nazýváme **dolní závora** množiny A, množinu všech dolních závor množiny A značíme A_*.

Je-li množina A omezená zdola, je množina dolních závor A_* nekonečná, protože $K \in A_*$ implikuje $K' \in A_*$ pro každé $K' < K$.

Definice 2.1.4. Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, když je omezená zdola i shora.

Definice 2.1.5. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo $a \in A$ je minimem množiny A (značíme $a = \min A$), když

$$(\forall x \in A)(a \leq x).$$

Ekvivalentně lze $\max A$, resp. $\min A$ definovat jako horní, resp. dolní závoru množiny A, která patří do A.

Poznámka. K množině $A \subset \mathbb{R}$ definujeme **opačnou** množinu $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Když K je horní závorou A, tj. $x \leq K$ pro všechna $x \in A$, je $-x \geq -K$, a proto $-K$ je dolní závorou opačné množiny $-A$. Platí

$$-A^* = (-A)_* \qquad \text{a} \qquad -A_* = (-A)^*.$$

Má-li množina B minimum, resp. maximum, má opačná množina $-B$ maximum, resp. minimum, přičemž platí $\min B = -\max(-B)$, resp. $\max B = -\min(-B)$.

Axiom 11. (axiom úplnosti) Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu platí, že množina jejích horních závor má minimum.

Nebo jinými slovy: mezi horními závorami shora omezené neprázdné množiny A existuje takové $\beta = \min A^*$, že žádné číslo menší než β nemůže už být horní závorou dané množiny.

Toto číslo β nazýváme **supremem množiny** A a značíme $\sup A$.

Zapíšeme teď symbolicky, jaké vlastnosti má supremum β pro shora omezenou neprázdnou množinu.

Vlastnosti suprema β:

1. $(\forall x \in A)(x \leq \beta)$ tj. β je horní závorou
2. $(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(\beta' < x)$ tj. nic menšího už není horní závorou

Jak už bylo řečeno, prvek $a \in A$ je maximem množiny, když je a horní závora množiny A. Menší horní závora už nemůže existovat. Proto platí

Věta 2.1.6. *Má-li množina A maximum, pak* $\max A = \sup A$.

Samozřejmě očekáváme podobné vlastnosti i pro množiny zdola omezené. Další axiom už ale přidávat nemusíme.

Věta 2.1.7. *Nechť A je neprázdná zdola omezená množina. Pak množina dolních závor A_* má maximum.*

Důkaz. Množina $-A$ je omezená shora, podle Axiomu 11 existuje $\min(-A)^*$. Podle poznámky za definicí 2.1.5 existuje maximum opačné množiny $-(-A)^*$ a platí

$$-\min(-A)^* = \max\big(-(-A)^*\big) = \max(A_*).$$

□

Věta tedy zaručuje existenci největší dolní závory neprázdné zdola omezené množiny. Toto číslo nazýváme **infimum množiny** A a značíme $\inf A$. Napišme opět v matematických symbolech, co znamená, že $\alpha = \inf A$.

Vlastnosti infima α**:**

1. $(\forall x \in A)(\alpha \leq x)$ tj. α je dolní závorou
2. $(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha')$ tj. nic většího už není dolní závorou

Následující věty ukazují, jaké závažné důsledky má Axiom úplnosti. Jedná se o vlastnosti reálých čísel, které běžně používáme, aniž bychom si uvědomovali odkud plynou.

Věta 2.1.8. *Množina přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *není omezená shora.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že množina horních závor množiny $\mathbb{N}$ je neprázdná. Z axiomu úplnosti existuje s=sup $\mathbb{N}$. Z druhé vlastnosti supréma plyne, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $s - 1 < n \leq s$. Z axiomu 9 dostaneme, že $s < n + 1$, přičemž $n + 1 \in \mathbb{N}$ - spor s první vlastnosti supréma. □

Věta 2.1.9. *Mezi každými dvěma různými reálnými čísly leží nějaké racionální číslo.*

Důkaz. Je snadné nahlédnout, že tvrzení stačí dokázat pro kladná čísla. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, tedy splňují $0 < a < b$.

Uvažujme číslo $K = \max\{\frac{1}{b-a}, \frac{1}{b}\}$. Protože $\mathbb{N}$ je neomezená shora, najdeme $q \in \mathbb{N}$ takové, že $q > K$. Zřejmě $0 < \frac{1}{q} < b - a$ a $1 < bq$. Položme $A = \{n \in \mathbb{N} \,|n < bq\}$. Protože $1 \in A$, je množina A neprázdná, navíc je konečná. Označme $p = \max A$, to znamená $p \in A$ a $p + 1 \notin A$. Abychom dokončili důkaz, ukážeme, že platí $a < \frac{p}{q} < b$. Z konstrukce hned plyne $\frac{p}{q} < b$. Na druhé straně, protože $b \leq \frac{p+1}{q}$, musí platit

$$a = b - (b - a) < \frac{p + 1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{p}{q}.$$

□

Věta 2.1.10. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.*

1. *Pro $a \geq 0$ a n sudé existuje jediné $b \geq 0$ takové, že $b^n = a$.*

2. *Pro $a \in \mathbb{R}$ a n liché existuje jediné $b \in \mathbb{R}$ takové, že $b^n = a$.*

Číslo b se nazývá n-tá odmocnina z čísla a, je zvykem je značit $\sqrt[n]{a}$ nebo $a^{\frac{1}{n}}$.

Důkaz. Ukážeme obě tvrzení pro $a \geq 0$, doplnit zbytek je pak už jednoduché. Nejdříve ukážeme jednoznačnost b. Když $a = 0$, pak zřejmě musí být $b = 0$. Proto uvažujeme $a > 0$. Předpokládejme, že $b_1 > 0$ a $b_2 > 0$ splňují $b_1^n = b_2^n = a$. Pak

$$0 = b_1^n - b_2^n = (b_1 - b_2) \sum_{k=0}^{n-1} b_1^k b_2^{n-1-k},$$

a protože $\sum_{k=0}^{n-1} b_1^k b_2^{n-1-k} > 0$, je nutně $b_1 - b_2 = 0$, tedy $b_1 = b_2$.

Pro důkaz existence b budeme nejdříve diskutovat případ $a \geq 1$. Definujme množinu $S = \{s \geq 0 \mid s^n \leq a\}$. Tato množina je neprázdná, např. $1 \in S$. Když $y > a$, pak $y^n > a^n \geq a$. Číslo větší než a proto nepatří do S, a tedy a je horní závorou množiny S. Definujme $b = \sup S$. Že takto definované b splňuje rovnost $b^n = a$, ukážeme vyloučením případů $b^n > a$ a $b^n < a$.

Předpokládejme, že by nastal případ $b^n < a$. Z binomické věty dostaneme pro libovolné $k \in \mathbb{N}$

$$\left(b+\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} \frac{1}{k^i} = b^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} \frac{1}{k^i} \leq b^n + \frac{r}{k}, \tag{2.1}$$

kde $r = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} \geq 0$. Protože podle věty 2.1.8 množina $\mathbb{N}$ není omezená shora, najdeme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $k \geq r/(a-b^n)$. Pro takové k pak z nerovnosti 2.1 plyne vztah $\left(b+\frac{1}{k}\right)^n \leq b^n + (a-b^n) = a$, což implikuje $b+\frac{1}{k} \in S$ - spor s tím, že $b = \sup S$.

Kdyby $b^n > a$, byla by situace podobná. Jako v předchozím případě použijeme binomickou větu a dostaneme

$$\left(b-\frac{1}{k}\right)^n \geq b^n - \frac{t}{k} \tag{2.2}$$

pro nějaké $t \geq 0$. Opět nalezneme dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{t}{k} < b^n - a$. Z nerovnosti 2.2 dostaneme $\left(b-\frac{1}{k}\right)^n > a$. Podle druhé vlastnosti suprema existuje $s \in S$ tak, že $b - \frac{1}{k} < s$, což dává $s^n > \left(b-\frac{1}{k}\right)^n > a$, opět spor. Proto nevyhnutelně $b^n = a$.

Když $1 > a > 0$, je $\frac{1}{a} > 1$ a podle už dokázaného nalezneme číslo c tak, aby $c^n = \frac{1}{a}$. Hledané b je pak rovno $\frac{1}{c}$. □

Rozšíření množiny reálných čísel.

K množině $\mathbb{R}$ přidáme dva nové objekty $+\infty$ a $-\infty$, tj. $-\infty \neq +\infty$ a $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$. Označme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Rozšíříme relaci uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ takto:

1) $-\infty < +\infty$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(-\infty < x < +\infty)$.

Snadno nahlédneme, že toto rozšíření má opět vlastnosti uspořádání. Množinu $\overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **rozšířená množina reálných čísel**.

Uvažujme $A \subset \mathbb{R}$. Triviálně je splněno

$$(\forall x \in A)(x \leq +\infty). \tag{2.3}$$

Když navíc množina A není omezená shora, platí

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in A)(K < x),$$

což lze ekvivalentně přepsat s malou modifikací

$$(\forall K \in \mathbb{R}, K < +\infty)(\exists x \in A)(K < x). \tag{2.4}$$

Vlastnosti 2.3 a 2.4 se formálně shodují s 1. a 2. vlastností suprema, když za β je dosazeno $+\infty$. Proto je přirozená následující definice.

Definice 2.1.11. Klademe
1. $\sup A = +\infty$ pro neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, která není omezená shora;
2. $\inf A = -\infty$ pro neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, která není omezená zdola;
3. $\inf \emptyset = +\infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$.

Snadno ověříme, že takto zavedené hodnoty pro suprema a infima mají vlastnosti 1. a 2. Dokážeme např., že pro prázdnou množinu má $\alpha = +\infty$ 1. a 2. vlastnost infima:

1. $(\forall x \in \emptyset)(+\infty \leq x)$ – je triviálně splněno, protože každé tvrzení o neexistujícím prvku je pravdivé.[1]

2. $(\forall \alpha > +\infty)(\exists x \in \emptyset)(x < \alpha)$ – žádné $\alpha > +\infty$ neexistuje, a proto zase tvrzení o něm je pravdivé.

Rozšíření množiny reálných čísel nám tak umožnilo definovat supremum a infimum pro libovolnou podmnožinu množiny reálných čísel. Můžeme to shrnout do závěrečné věty:

Věta 2.1.12. *Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak*

i) *existuje právě jedno $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, že splňuje 1. a 2. vlastnost suprema;*

ii) *existuje právě jedno $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, že splňuje 1. a 2. vlastnost infima.*

Poznámka. Jednoznačnost prvku β, resp. α lze dokázat pomocí 1. a 2. vlastnosti suprema, resp. infima. Detaily přenecháváme čtenáři.

2.2 Množina komplexních čísel

Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je "v podstatě" vektorový prostor $\mathbb{R}^2$, v němž je navíc definováno násobení a do něhož je vnořena množina reálných čísel $\mathbb{R}$. Popišme $\mathbb{C}$ přesněji.

Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel, tedy prvky roviny $\mathbb{R}^2$. Je-li $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, pak číslo x nazýváme **reálná část** čísla z a číslo y nazýváme **imaginární část** čísla z. Zapisujeme

$$x = Re\ z \qquad \text{a} \qquad y = Im\ z\ .$$

[1] Každé tvrzení o prvcích prázdné množiny je pravdivé, neboť nepravdivá premisa $a \in \emptyset$ zaručuje pravdivost jakékoli implikace.

Pro komplexní číslo $(0,1)$ používáme zkratku i. Komplexní čísla geometricky znázorňujeme pomocí bodů v rovině: číslu (x,y) odpovídá bod roviny o souřadnicích x, y. Proto pro $\mathbb{C}$ se užívá též názvu **komplexní rovina** nebo **Gaußova rovina**. Pro komplexní čísla je sčítání a násobení definováno takto: Jsou-li $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$ komplexní čísla, klademe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Pro dvojice s nulovou imaginární částí korespondují tyto operace s těmi operacemi, které již známe z $\mathbb{R}$:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1, 0).(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \ .$$

To umožňuje ztotožnit dvojici $(x, 0)$ s reálným číslem $x \in \mathbb{R}$; po tomto ztotožnění je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Snadno lze ověřit, že komplexní čísla s definovanými operacemi součtu a součinu splňují všechny axiomy tělesa, jak byly uvedeny v kapitole Reálná čísla.

Aplikujme definici násobení na $i.i = i^2$:

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Jsou-li x, y reálná čísla, pak

$$x + iy = (x, 0) + (0, 1).(y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y),$$

takže komplexní čísla lze zapisovat i ve tvaru $x+iy$. Z rovnosti $z = x+iy$ obecně neplyne, že $x, y \in \mathbb{R}$, tj. že $x = Re\ z$ a $y = Im\ z$. Přijmeme však úmluvu, že kdykoliv zapíšeme komplexní číslo ve tvaru $x + iy$, předpokládáme, že již platí $x, y \in \mathbb{R}$.

Je-li $z = x + iy$, nazýváme číslo $\overline{z} = x - iy$ číslem **komplexně sdruženým k číslu** z. Snadno lze ověřit, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí rovnosti:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z \ .$$

Poznamenejme, že číslo $z\overline{z} = x^2 + y^2$ je vždy nezáporné. Jeho pomocí definujeme **absolutní hodnotu** $|z|$ vztahem

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Jestliže komplexní čísla interpretujeme jako body roviny, pak je $|z|$ vzdálenost bodu $z = (x, y)$ od počátku. Velmi důležitý je fakt, že pro absolutní hodnotu platí i v $\mathbb{C}$

trojúhelníková nerovnost

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Absolutní hodnota nám umožňuje definovat důležité podmnožiny množiny $\mathbb{C}$:
Nechť $z \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Množinu

$$K(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\}$$

nazýváme **otevřeným kruhem** se středem z a poloměrem r
a množinu

$$\overline{K}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| \leq r\}$$

uzavřeným kruhem se středem z a poloměrem r.

V $\mathbb{C}$ **nezavádíme** relaci uspořádání jako v $\mathbb{R}$. Komplexní čísla lze uspořádat např. lexikograficky

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(x_1 < x_2 \ \text{ nebo } \ \big(x_1 = x_2 \text{ a } y_1 \leq y_2\big)\Big).$$

Toto uspořádání splňuje Axiomy 8 a 9. Ale lexikografické uspořádání ani žádné jiné na $\mathbb{C}$ nemá vlastnosti všech Axiomů uspořádání 8-10, které platily pro reálná čísla. Stačí uvážit, že $i \neq 0$ a že z každé z obou nerovností $i > 0$ a $i < 0$ by plynulo $i^2 = -1 > 0$, což vede ke sporu (viz dodatek ke kapitole).

Ukážeme nyní, jak komplexní rovinu lze bijektivně zobrazit na povrch koule, ze které vyjmeme jeden bod. Nechť v prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána koule o středu $s = (0,0,1/2)$ a poloměru $r = 1/2$. Tedy tato koule se dotýká v bodě $(0,0,0)$ roviny, jejíž body mají tvar $(x,y,0)$. Komplexnímu číslu $x+iy$ přiřadíme bod $f(x+iy) = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,1)$ z povrchu koule tak, aby body $(x,y,0)$, (α,β,γ) a "severní pól"$(0,0,1)$ ležely na jedné přímce. Snadno lze spočítat, že toto zobrazení má explicitní tvar

$$x+iy \mapsto f(x+iy) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\right).$$

Z geometrické konstrukce zobrazení je zřejmé, že f zobrazuje prostě celé $\mathbb{C}$ na povrch koule vyjma "severní pól". Zobrazení f se někdy říká stereografická projekce.

Omezené podmnožiny množiny $\mathbb{C}$

Protože jsme na $\mathbb{C}$ nezavedli uspořádání, nemá smyslu hovořit o omezenosti množiny zdola ani shora. Lze však definovat omezenost množiny:

Definice 2.2.1. Nechť $A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že množina A je omezená, když

$$(\exists r \in \mathbb{R}, r > 0)(\forall z \in A)(|z| \leq r). \tag{2.5}$$

Poznámka. Jinými slovy lze definovat omezenost takto: Množina A je omezená, jestliže existuje kladné číslo r tak, že celá množina A leží v uzavřeném kruhu o poloměru r se středem v počátku.

Porovnejme definice omezenosti množiny v komplexním případě a v reálném případě. Uvažujme množinu $A \subset \mathbb{R}$, která splňuje podmínku 2.5. Nerovnost $|x| \leq r$ znamená pro reálné číslo x, že $-r \leq x \leq r$. Proto je $-r$ dolní a r horní závorou množiny A. Tedy podmnožina reálných čísel splňující 2.5 je omezená dle definice omezenosti 2.1.4 pro reálná čísla.
Z druhé strany, nechť reálná množina A je omezená dle definice omezenosti v kapitole Reálná čísla. To znamená, že

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq K) \qquad \text{a} \qquad (\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(H \leq x).$$

Položíme-li $r = \max\{|K|, |H|\}$, pak pro každé $x \in A$ platí

$$-r = -\max\{|K|, |H|\} \leq -|H| \leq H \leq x \leq K \leq |K| \leq \max\{|K|, |H|\} = r,$$

což implikuje, že pro omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ existuje kladné r tak, že $|x| \leq r$ pro všechna $x \in A$. Tedy omezenost množiny lze v reálném i komplexním případě definovat formálně stejným způsobem 2.5.

Rozšíření množiny komplexních čísel.

K množině $\mathbb{C}$ přidáme jeden nový objekt ∞, tj. $\infty \notin \mathbb{C}$. Množinu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nazýváme **rozšířenou množinou komplexních čísel**.

Poznamenejme, že $\overline{\mathbb{R}} \not\subset \overline{\mathbb{C}}$, protože objekty $+\infty$ a $-\infty$ nepatří do $\overline{\mathbb{C}}$. Dodefinujeme-li stereografickou projekci v bodě ∞ jako $f(\infty) = (0, 0, 1)$, je f bijektivním zobrazením $\overline{\mathbb{C}}$ na celý povrch koule.

2.3 Okolí bodů množin $\overline{\mathbb{R}}$ a $\overline{\mathbb{C}}$

Než přejdeme k zavedení důležitého pojmu limity posloupnosti a posléze funkce, definujeme "okolí bodu".

Definice 2.3.1. Nechť $a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka. Snadno nahlédneme, že příslušnost bodu x k okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ lze vyjádřit ekvivalentně

$$x \in H_a(\varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - a| < \varepsilon.$$

Definice 2.3.2. Nechť $a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a, a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon, a)$ nazýváme **pravým, resp. levým ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme $H_{a+}(\varepsilon)$, resp. $H_{a-}(\varepsilon)$.

Poznámka. Množinám $H_{a+}(\varepsilon)$ a $H_{a-}(\varepsilon)$ se říká **jednostranné** okolí; množině $H_a(\varepsilon)$ se pak říká **oboustranné** okolí.
Všimněme si, že $a \notin H_{a+}(\varepsilon)$, $a \notin H_{a-}(\varepsilon)$, ale $a \in H_a(\varepsilon)$.

Definice 2.3.3. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.
Otevřený interval $(\alpha, +\infty)$ nazýváme **α-okolím bodu $+\infty$ v $\mathbb{R}$** a značíme $H_{+\infty}(\alpha)$.
Otevřený interval $(-\infty, -\alpha)$ nazýváme **α-okolím bodu $-\infty$ v $\mathbb{R}$** a značíme $H_{-\infty}(\alpha)$.

Poznámka. Není-li potřeba specifikovat velikost ε, resp. α, říkáme stručně jenom okolí bodu a a značíme H_a.

Poznámka. Okolí bodu jsme definovali pro libovolný bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Samotné okolí ale vždycky patří do $\mathbb{R}$, tj. $H_a \subset \mathbb{R}$.

Definice 2.3.4. Nechť $a \in \mathbb{C}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Otevřený kruh $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$ nazýváme **ε-okolím bodu a v $\mathbb{C}$** a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Definice 2.3.5. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \alpha\}$ nazýváme **α-okolím bodu ∞ v $\mathbb{C}$** a značíme $H_\infty(\alpha)$. α-okolím bodu ∞ je tedy množina $\mathbb{C} - \overline{K}(0, \alpha)$.

Upozornění: Zápis $H_a(\varepsilon)$, $a \in \mathbb{R}$ musíme vždy doplnit o údaj, zda uvažujeme okolí bodu a v množině $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Z definice lze odvodit jednoduché vlastnosti okolí bodu. I když jsou na první pohled zřejmé, je důležité zdůraznit jejich platnost. Proto je shrneme do věty (důkaz přenecháváme čtenáři).

Věta 2.3.6. *1. Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a nechť $H_a^{(1)}$ a $H_a^{(2)}$ jsou okolí bodu a v $\mathbb{R}$. Pak*

$$(\exists H_a)(H_a \subset H_a^{(1)} \text{ a } H_a \subset H_a^{(2)}).$$

2. Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, nechť H_a je okolí bodu a v $\mathbb{R}$, a nechť $b \in H_a$. Pak

$$(\exists H_b)(H_b \subset H_a).$$

3. Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *a nechť* $a \neq b$. *Pak*

$$(\exists H_a)(\exists H_b)(H_a \cap H_b = \emptyset).$$

Stejná tvrzení platí i v případě, budeme-li brát body z množiny $\overline{\mathbb{C}}$ a jejich okolí budeme uvažovat v množině $\mathbb{C}$.

2.4 Dodatek

Příklady odvození některých vlastností reálných čísel z Axiomů 1-11.

B1. **Existuje jediný nulový prvek**:
Nechť 0_1 a 0_2 jsou nulové prvky, kterých existenci zaručuje Axiom 4. Pak

$$0_1 \overset{A4}{=} 0_1 + 0_2 \overset{A1}{=} 0_2 + 0_1 \overset{A4}{=} 0_2.$$

Nad rovnítko píšeme číslo axiomu, který jsme pro rovnost použili.

B2. **Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje jediný opačný prvek**:
Nechť $(-x)_1$ a $(-x)_2$ jsou opačné prvky k číslu $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$(-x)_1 \overset{A4}{=} (-x)_1 + 0 \overset{A5}{=} (-x)_1 + \big(x + (-x)_2\big) \overset{A2}{=} \big((-x)_1 + x\big) + (-x)_2 \overset{A1}{=}$$

$$\overset{A1}{=} \big(x + (-x)_1\big) + (-x)_2 \overset{A5}{=} 0 + (-x)_2 \overset{A1}{=} (-x)_2 + 0 \overset{A4}{=} (-x)_2.$$

B3. **Opačný prvek k $(-x)$ je x pro každé $x \in \mathbb{R}$.**
Protože $0 \overset{A5}{=} x + (-x) \overset{A1}{=} (-x) + x$, je x opačný prvek k $(-x)$. Podle B2 existuje jediný opačný prvek, proto $\big(-(-x)\big) = x$.

B4. **Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x.0 = 0$.**

$$0 \overset{A5}{=} x+(-x) \overset{A6}{=} 1.x+(-x) \overset{A4}{=} (1+0).x+(-x) \overset{A1}{=} x.(1+0)+(-x) \overset{A3}{=} \big(x.1+x.0\big)+(-x) \overset{A1,6}{=}$$

$$\overset{A1,6}{=} \big(x + x.0\big) + (-x) \overset{A1,2}{=} x.0 + \big(x + (-x)\big) \overset{A5}{=} x.0 + 0 \overset{A4}{=} x.0.$$

B5. $(-x).y = -(x.y)$ **pro každé** $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(-x).y + x.y \overset{A3}{=} \big((-x) + x\big).y \overset{A5}{=} 0.y = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z B4. Tedy $(-x).y$ je opačný prvek k $x.y$.

B6. **Pro nulový a jednotkový prvek platí** $0 < 1$.

Předpokládejme opak, tj. $1 \leq 0$. Přičtením čísla (-1) k této nerovnosti dostaneme podle A9 vztah $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$, z čehož podle A5 a A4 máme $0 \leq (-1)$. Teď využijeme A10 pro hodnoty $x = 0, y = -1, z = -1$. Platí

$$0.(-1) \leq (-1).(-1) \quad \overset{B4,5}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq -\left(1.(-1)\right) \overset{A6}{=} -(-1) \quad \overset{B3}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq 1.$$

Tedy z předpokladu $1 \leq 0$ jsme odvodili $0 \leq 1$, z vlastnosti antisymetrie relace uspořádání plyne $0 = 1$, což je spor s požadavkem A6, že $0 \neq 1$.

Kapitola 3

Číselné posloupnosti

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1.1. Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do nějaké neprázdné množiny A nazýváme **posloupnost**.
Speciálně:
– když $A = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, mluvíme o číselné posloupnosti,
– když $A = \mathbb{R}$, mluvíme o reálné posloupnosti,
– když $A = \mathbb{C}$, mluvíme o komplexní posloupnosti.

Místo obecného značení $a : \mathbb{N} \mapsto A$ pro zobrazení resp. značení $a(n)$ pro obraz bodu n se vžilo pro posloupnost značení:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{nebo} \qquad (a_n)_{n=1}^{+\infty} \qquad \text{nebo} \qquad (a_n) \ .$$

Obraz bodu n se značí a_n a říkáme mu také n-tý člen posloupnosti.

Poznámka. Obor hodnot posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ značíme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tj.

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = a_n \ \}.$$

Vlastnosti zobrazení v zápisu pro posloupnosti:

- Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je **konstantní** $\iff$ $(\forall\, n, m \in \mathbb{N})(a_m = a_n)$.
- Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je **prostá** $\iff$ $(\forall\, n, m \in \mathbb{N})(n \neq m \ \Rightarrow \ a_m \neq a_n)$.

Definujme další vlastnosti posloupností.

Definice 3.1.2. (vlastnosti posloupnosti)

- Reálnou posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazýváme **omezenou shora**, když její obor hodnot $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je množina omezená shora, tj. $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq K)$.

- Reálnou posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazýváme **omezenou zdola**, když její obor hodnot $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je množina omezená zdola, tj. $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(H \leq a_n)$.
- Reálnou nebo komplexní posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazýváme **omezenou**, když její obor hodnot $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je množina omezená, tj. $(\exists r \in \mathbb{R}, r > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq r)$.
- Reálnou posloupnost nazýváme **rostoucí**, když platí $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$.
- Reálnou posloupnost nazýváme **klesající**, když platí $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq a_{n+1})$.
- Reálnou posloupnost nazýváme **monotonní**, když je rostoucí nebo klesající.
- Reálnou posloupnost nazýváme **ostře rostoucí**, když platí $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$.
- Reálnou posloupnost nazýváme **ostře klesající**, když platí $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > a_{n+1})$.
- Reálnou posloupnost nazýváme **ryze monotonní**, když je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Z těchto definic základních pojmů lze odvodit následující jednoduchá pozorování pro reálnou posloupnost:

1) ryze monotonní $\Longrightarrow$ monotonní
   ostře rostoucí $\Longrightarrow$ rostoucí
   ostře klesající $\Longrightarrow$ klesající

2) ostře rostoucí $\Longleftrightarrow$ rostoucí a prostá
   ostře klesající $\Longleftrightarrow$ klesající a prostá

3) konstantní $\Longleftrightarrow$ rostoucí a klesající

4) rostoucí $\Longrightarrow$ zdola omezená
   klesající $\Longrightarrow$ shora omezená

Definice 3.1.3. Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nechť je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nazýváme **posloupnost vybraná** z posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Poznámka. Vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ je vlastně složením dvou posloupností, ve smyslu skládání zobrazení:

$$k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \quad \text{a} \quad a : \mathbb{N} \mapsto A \qquad \Longrightarrow \qquad (a \circ k)(n) = a(k(n)) = a_{k_n}$$

Pozor! Od zobrazení k požadujeme, aby to byla ostře rostoucí posloupnost.

Příklad 3.1.4. Posloupnost $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, kde za posloupnost $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lze vzít např. $k_n = 2n$, ale také posloupnost $k_n = 4n + 2$.
Posloupnost $\big((n+1)!\big)_{n\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zkuste určit k_n.

3.2 Limita číselné posloupnosti

Definice 3.2.1. Řekneme, že reálná posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$, když

$$(\forall\ H_a \subset \mathbb{R})(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a).$$

Řekneme, že komplexní posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{C}}$, když

$$(\forall\ H_a \subset \mathbb{C})(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a).$$

Zapisujeme

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = a \qquad \text{nebo zkráceně} \qquad \lim\ a_n = a \qquad \text{nebo} \qquad a_n \mapsto a.$$

Je-li jasné z kontextu, že a_n jsou členy posloupnosti (tj. že n probíhají přirozená čísla) a je-li zřejmé těleso (tj. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$), používáme pro definici limity stručného zápisu:

$$(\forall\ H_a)(\exists\ n_0)(\forall\ n > n_0)(a_n \in H_a).$$

Poznámky k definici.

1. Fakt, že posloupnost má limitu a podle definice znamená, že v každém okolí H_a bodu a leží všechny členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek.

2. Ekvivalentní definici dostaneme, když místo existence $n_0 \in \mathbb{R}$ požadujeme existenci $n_0 \in \mathbb{N}$.

3. Rozepišme definici limity reálné posloupnosti pro případ $a \in \mathbb{R}$. Protože okolí H_a má tvar $H_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε, přepisujeme spojení "pro každé okolí"spojením "pro každé kladné ε". Příslušnost prvku a_n k okolí $H_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ znamená $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ nebo ekvivalentně $|a_n - a| < \varepsilon$. Tedy

   $$\lim a_n = a \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon).$$

4. Rovněž lze přepsat definici limity reálné posloupnosti pro případ $a = +\infty$. Stačí si uvědomit, že každé okolí $H_{+\infty}$ koresponduje s nějakým kladným α a že příslušnost

$a_n \in H_{+\infty} = (\alpha, +\infty)$ lze vyjádřit nerovností $a_n > \alpha$. Proto

$$\lim a_n = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha).$$

Obdobně

$$\lim a_n = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{R})(\forall\, n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n < -\alpha).$$

5. V případě, že všechny členy posloupnosti jsou reálné, je třeba ujasnit, zda uvažujeme (a_n) jako reálnou nebo komplexní posloupnost. Posloupnost $\big((-1)^n n\big)$ uvažovaná jako reálná posloupnost limitu nemá, zatímco když se na ni díváme jako na komplexní posloupnost, má limitu $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, viz následující příklad.

Příklad 3.2.2. Pro komplexní posloupnost $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ platí

$$\lim_{n\mapsto+\infty} (-1)^n n = \infty\ .$$

Protože každé okolí ∞ v $\mathbb{C}$ je tvořeno vnějškem nějakého kruhu se středem v počátku, je každému okolí nekonečna přiřazen kladný poloměr α; komplexní číslo x pak přísluší tomuto okolí, když je vzdáleno od počátku více, než je daný poloměr. Máme tedy dokázat:

$$(\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|(-1)^n n| > \alpha).$$

Jelikož $|(-1)^n n| = n$, stačí pro každé α položit $n_0 = \alpha$. Pak zřejmě pro libovolné přirozené $n > n_0$ plyne $|(-1)^n n| = n > \alpha$.

Věta 3.2.3. *Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. (sporem) Nechť a, b jsou dvě různé limity posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Z vlastností okolí 2.3.6 plyne, že pro dva různé body existují navzájem disjunktní okolí $H_a^{(0)}$ a $H_b^{(0)}$. Z definice limity zase pro $H_a^{(0)}$ najdeme n_1 tak, že $a_n \in H_a^{(0)}$ pro každé $n > n_1$. A obdobně najdeme n_2 tak, že $a_n \in H_b^{(0)}$ pro každý index $n > n_2$. Vezmeme-li $n > \max\{n_1, n_2\}$, má a_n patřit do obou okolí současně, ale ta jsou přitom disjunktní - spor. □

Na příkladě 3.2.2 jsme viděli, že dokázat přímo z definice tvrzení ”limita je rovna a”znamená dát předpis, jak ke kladnému parametru (označenému α nebo ε) najít n_0 tak, aby bylo splněno $a_n \in H_a$ pro každé přirozené $n > n_0$. Pro zdůvodnění následujících limit dáme jenom tento předpis, zbytek je zřejmý.

Příklad 3.2.4. 1. Pro ověření tvrzení $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$ stačí vzít $n_0 = 1/\varepsilon$:

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|1/n| < \varepsilon).$$

2. Při určení limity konstantní posloupnosti lze dokonce volit n_0 libovolně, nezávislé na ε:

$$\lim_{n\mapsto+\infty} c = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|c - c| < \varepsilon).$$

Definice 3.2.5. Posloupnost, která má limitu $a \in \mathbb{R}$ resp. $a \in \mathbb{C}$, se nazývá **konvergentní**.
Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá **divergentní**.
Posloupnost, která má limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ nebo ∞, se nazývá **podstatně divergentní**.
Posloupnost, která nemá limitu, se nazývá **oscilující**.

Věta 3.2.6. (o limitě vybrané posloupnosti) *Nechť posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu a. Pak každá posloupnost vybraná z $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu a.*

Důkaz. Uvažujme vybranou posloupnost $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, kde (k_n) je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, tj. $k_{j+1} - k_j \geq 1$ pro každé přirozené j. Proto

$$k_n = (k_n - k_{n-1}) + (k_{n-1} - k_{n-2}) + \ldots + (k_2 - k_1) + k_1 \geq n.$$

Předpoklad $\lim\ a_n = a$ značí $(\forall\ H_a)(\exists\ n_0)(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a)$.

Protože nerovnost $n > n_0$ implikuje $k_n > n_0$, plyne z platnosti předchozího výroku také platnost $(\forall\ H_a)(\exists\ n_0)(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_{k_n} \in H_a)$, tedy i limita vybrané posloupnosti je a. □

Důsledek 3.2.7. *Lze-li z posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vybrat dvě posloupnosti s různými limitami, pak limita posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neexistuje.*

Příklad 3.2.8. Z komplexní posloupnosti $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vyberme dvě posloupnosti $(i^{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ a $(i^{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Jsou to konstantní posloupnosti $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(i)_{n\in\mathbb{N}}$. Mají tedy různé limity. Proto $\lim_{n\mapsto+\infty} i^n$ neexistuje.

Příklad 3.2.9.

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{4n! - n^2} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

protože $k_n = 4n! - n^2$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a tedy posloupnost $\left(\frac{1}{4n!-n^2}\right)$ je vybraná z posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$.

V důkazu poslední věty nebylo ani tak důležité, že samotná posloupnost (k_n) je ostře rostoucí, jako spíše to, že její členy od jistého počínaje překročí libovolně zvolenou mez. Proto lze vyslovit zobecnění této věty, jejíž důkaz je malou modifikací předchozího a přenecháme jej čtenáři.

Věta 3.2.10. (o limitě skorovybrané posloupnosti) *Nechť (a_n) je číselná posloupnost s limitou c a (k_n) je posloupnost přirozených čísel s limitou $+\infty$. Pak*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_{k_n} = c.$$

Jak už naznačil název předchozí věty, posloupnosti $\left(a_{k_n}\right)$ budeme říkat **skorovybraná** z posloupnosti (a_n), když (k_n) je posloupnost přirozených čísel s limitou $+\infty$. Např. posloupnosti $\left(2^{[\sqrt{n}]}\right)$ a $\left(2^{n+(-1)^n}\right)$ jsou skorovybrané z posloupnosti (2^n), nejsou však z ní vybrané.

Věta 3.2.11. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*
Pro reálné posloupnosti dále platí:
$\lim\ a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad (a_n)$ *je omezená zdola, není omezená shora.*
$\lim\ a_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad (a_n)$ *je omezená shora, není omezená zdola.*

Důkaz. Nechť $a = \lim\ a_n$. Pak např. pro $\varepsilon = 1$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, je $|a_n - a| < 1$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

dostaneme

$$(\exists n_0)(\forall n > n_0)\big(|a_n| < 1 + |a|\big).$$

Položíme-li $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, pak $|a_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj. posloupnost (a_n) je omezená.

Uvažujme reálnou posloupnost (a_n) s limitou $+\infty$, tedy podle definice limity platí $(\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > \alpha)$. Abychom ukázali neomezenost množiny $\{a_n\}$ shora, musíme ke každému $K \in \mathbb{R}$ najít nějaké n tak, aby $a_n > K$. Když do definice limity dosadíme za α kladné číslo $|K|$, tak z definice dostaneme existenci dokonce nekonečně mnoha takových n, konkrétně všech $n \in \mathbb{N}$ větších než n_0.
Pro omezenost zdola použijeme opět definici limity, teď za α zvolíme číslo 1, ke kterému dostaneme nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n > 1$ pro všechna $n > n_0$. Snadno se lze přesvědčit, že číslo $H = \min\{1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$ je dolní závorou množiny $\{a_n\}$.
Zbylé tvrzení pro případ $\lim\ a_n = -\infty$ se dokazuje analogicky. □

Následující větu lze shrnout do hesla "Vynecháním konečně mnoha členů se u posloupnosti nezmění vlastnosti: omezenost, konvergence, divergence, hodnota limity."

Věta 3.2.12. *Nechť* (a_n) *je číselná posloupnost a* $p \in \mathbb{N}$ *je libovolné pevně zvolené číslo. Pak platí*

1) $\quad \lim\ a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\ a_{n+p} = a,$

2) $\quad (a_n)$ *je omezená* $\quad \Longleftrightarrow \quad (a_{n+p})$ *je omezená.*

Je-li (a_n) reálná posloupnost, pak

3) $\quad (a_n)$ *je omezená zdola* $\iff$ (a_{n+p}) *je omezená zdola.*

4) $\quad (a_n)$ *je omezená shora* $\iff$ (a_{n+p}) *je omezená shora.*

Důkaz. 1) Protože posloupnost (a_{n+p}) je vybraná z posloupnosti (a_n), plyne implikace $(\Rightarrow)$ přímo z věty 3.2.6 o limitě vybrané posloupnosti. Pro důkaz obrácené implikace napišme, co znamená, že $\lim a_{n+p} = a$:

$$(\forall\ H_a)(\exists\ n_0 \in \mathbb{R})(\forall\ n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_{n+p} \in H_a).$$

Když položíme $n_1 = n_0 + p$, pak pro $n > n_1$ máme $n - p > n_0$, a proto z předchozího řádku $a_{(n-p)+p} = a_n \in H_a$, což znamená, že $\lim a_n = a$.

2) Opět implikace $(\Rightarrow)$ je zřejmá, neboť $\{a_n\} \supset \{a_{n+p}\}$. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že (a_{n+p}) je omezená, tj. existuje kladné K tak, že $|a_{n+p}| \leq K$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Když položíme $\widetilde{K} = \max\{K, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_p|\}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq \widetilde{K}$. Tedy posloupnost (a_n) je omezená.
Důkaz zbylých tvrzení je pouze mírnou modifikací předchozího důkazu. □

Věta 3.2.13. *Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro rostoucí posloupnost; důkaz pro klesající posloupnost je obdobný. Pro rostoucí posloupnost (a_n) ukážeme, že $\beta = \sup\{a_n\}$ je její limitou. Rozlišíme dva případy: a) $\beta \in \mathbb{R}$ a b) $\beta = +\infty$.

a) Nechť $\beta \in \mathbb{R}$. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z druhé vlastnosti suprema najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\beta - \varepsilon < a_{n_0}$. Z monotonie posloupnosti a z 1. vlastnosti suprema dostaneme pro každé $n > n_0, n \in \mathbb{N}$

$$\beta - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - \beta| < \varepsilon.$$

Celkově máme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - \beta| < \varepsilon),$$

což je symbolický zápis toho, že $\lim a_n = \beta$.

b) Nechť $\beta = +\infty$. To je ekvivalentní tvrzení, že množina $\{a_n\}$ není omezená shora, zapsáno symbolicky $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} > \alpha)$. To dohromady s tím, že (a_n) je rostoucí, dává

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(a_n > \alpha).$$

To však znamená, že $\lim a_n = +\infty$. $\square$

Poznámka. Z důkazu věty plyne, že limitou rostoucí posloupnosti je supremum jejího oboru hodnot; pro klesající posloupnost je limitou infimum oboru hodnot. Proto platí:

Když $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rostoucí, pak $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \lim a_n)$.

Když $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je klesající, pak $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq \lim a_n)$.

Je-li (a_n) ryze monotonní posloupnost, platí v předchozích vztazích dokonce ostrá nerovnost (rozmyslete proč):

Když $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ostře rostoucí, pak $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < \lim a_n)$.

Když $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ostře klesající, pak $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > \lim a_n)$.

Příklad 3.2.14. Posloupnost $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je zřejmě ostře rostoucí. Tedy existuje limita této posloupnosti, která může být konečná nebo $+\infty$. Z věty o vybraných posloupnostech víme, že existuje i limita každé posloupnosti z ní vybrané a tyto limity jsou stejné. Studujme vybranou posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$. Pro tuto posloupnost platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \ldots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Sečteme-li předchozí nerovnosti pro $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, dostaneme

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Vidíme, že posloupnost (b_n) není omezená shora, a tedy její limita je $+\infty$.
Odvodili jsme tvrzení

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Tato posloupnost se nazývá **posloupnost harmonických čísel**.

Tuto kapitolu zakončíme větou, která ukazuje, jak výpočet limit komplexních posloupností převést na výpočet limit reálných posloupností. Proto v dalších kapitolách věnovaných výpočtu limit se budeme zabývat pouze reálnými posloupnostmi.

Věta 3.2.15. *Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je komplexní posloupnost. Označme α_n reálnou a β_n imaginární část a_n, tj. $\alpha_n = Re\, a_n$ a $\beta_n = Im\, a_n$.*

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentní, právě když obě posloupnosti $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jsou konvergentní. V kladném případě platí $\lim a_n = \lim \alpha_n + i \lim \beta_n$.

2) $\lim a_n = \infty$, *právě když* $\lim |a_n| = +\infty$.

Důkaz. 1) Předpokládejme, že existuje $\lim a_n = a \in \mathbb{C}$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon).$$

Označme $\alpha = Re\, a$ a $\beta = Im\, a$. Využijeme toho, že pro každé komplexní číslo $A + iB$ platí $|A+iB| \geq \max\{|A|, |B|\}$. Dostaneme nerovnosti $\varepsilon > |a_n - a| \geq |\alpha_n - \alpha|$ a současně $\varepsilon > |a_n - a| \geq |\beta_n - \beta|$. Tedy máme $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon)$, což značí $\lim \alpha_n = \alpha$. Ze stejného důvodu pak $\lim \beta_n = \beta$.

Pro opačnou implikaci předpokládejme, že $\lim \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ a $\lim \beta_n = \beta \in \mathbb{R}$. To symbolicky lze zapsat:

$(\forall \delta > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(|\alpha_n - \alpha| < \delta)$, resp. $(\forall \delta > 0)(\exists n_2)(\forall n > n_2)(|\beta_n - \beta| < \delta)$.
Teď využijeme toho, že pro komplexní číslo $A + iB$ platí $|A + iB| \leq |A| + |B|$.
Zvolme libovolné kladné ε. Položme $\delta = \varepsilon/2$. K tomuto δ nalezneme příslušná n_1, resp. n_2. Pro každé $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dostáváme

$$|a_n - (\alpha + i\beta)| = |(\alpha_n - \alpha) + i(\beta_n - \beta)| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Shrnuto: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - (\alpha + i\beta)| < \varepsilon)$, a tedy
$\lim a_n = \alpha + i\beta = \lim \alpha_n + i \lim \beta_n$.

Zápis $\lim a_n = \infty$ znamená $(\forall \gamma > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n| > \gamma)$. Zápis $\lim |a_n| = +\infty$ je úplně stejný. To dokazuje tvrzení bodu 2) věty. $\square$

3.3 Výpočet limit

Abychom nemuseli vyslovovat věty o limitě součtu, součinu atd. dvou posloupností ve více variantách podle toho, zda tyto posloupnosti mají limitu v $\mathbb{R}$ nebo v $\overline{\mathbb{R}} - \mathbb{R}$, rozšíříme nejdříve definici operací na $\overline{\mathbb{R}}$.

Definice 3.3.1. Pro $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definujeme:

$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty,$ je-li $a > -\infty$
$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty,$ je-li $a < +\infty$
$a.(+\infty) = (+\infty).a = +\infty,$ je-li $a > 0$
$a.(+\infty) = (+\infty).a = -\infty,$ je-li $a < 0$
$a.(-\infty) = (-\infty).a = -\infty,$ je-li $a > 0$
$a.(-\infty) = (-\infty).a = +\infty,$ je-li $a < 0$
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Rozdíl definujeme vztahem: $a - b = a + (-b)$, podíl vztahem $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$, pokud je součet, resp. součin na pravé straně rovnosti defininován. Klademe přitom $-(+\infty) = -\infty$ a $-(-\infty) = +\infty$. Dále klademe

$|-\infty| = |+\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka. **Nedefinovány** tedy zůstaly výrazy

$$\pm\infty - (\pm\infty), \quad \pm\infty + (\mp\infty), \quad 0.(\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \ \text{ pro } \ a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Věta 3.3.2. *Nechť* (a_n) *je reálná posloupnost. Pak platí:*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = a \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\mapsto+\infty} |a_n| = |a|,$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\mapsto+\infty} |a_n| = 0.$$

Důkaz. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Z definice limity dostaneme

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon). \tag{3.1}$$

Ukažme nejdříve, že $||x|-|y|| \leq |x-y|$ pro každá dvě komplexní čísla x, y. Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| - |y| \leq |x - y|$$

a podobně

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |y| - |x| \leq |y - x|.$$

Z nerovností $c \leq d$ a $-c \leq d$ plyne $|c| \leq d$ pro libovolná čísla $c, d \in \mathbb{R}$. Což při volbě $c = |x| - |y|$ a $d = |x - y|$ už dává nerovnost $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Vraťme se k důkazu věty. Můžeme psát

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

3.1 tedy implikuje tvrzení

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(||a_n| - |a|| < \varepsilon), \tag{3.2}$$

což je formální zápis toho, že $\lim |a_n| = |a|$.

Všimněme si, že v případě $a = 0$ jsou výroky 3.1 a 3.2 totožné, což dokazuje druhou část tvrzení.

Vraťme se ale k důkazu prvního tvrzení. Předpokládejme nyní, že $\lim a_n = -\infty$, tj.

$$(\forall\alpha > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(a_n < -\alpha) \tag{3.3}$$

Vynásobením nerovnosti $a_n < -\alpha$ číslem -1 dostaneme $0 < \alpha < -a_n = |a_n|$. Proto 3.3 implikuje

$$(\forall \alpha > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n| > \alpha) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim |a_n| = +\infty.$$

Důkaz pro případ $\lim a_n = +\infty$ je analogický a nebudeme jej už diskutovat. □

Poznámka. Jak jsme už uvedli, posloupnost $\big((-1)^n\big)$ nemá limitu, zatímco posloupnost absolutních hodnot této posloupnosti $\big(|(-1)^n|\big) = (1)$ má limitu 1. Tento příklad ukazuje, proč v první části předchozí věty nelze obrátit implikaci.

Věta 3.3.3. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti, které mají limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim a_n$ a $b = \lim b_n$. Platí*

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$,

2) $\lim(a_n - b_n) = a - b$,

3) $\lim(a_n . b_n) = a.b$,

4) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,

pokud výraz na pravé straně má smysl. U tvrzení 4) navíc předpokládáme, že $b_n \neq 0$ pro každý index n.

Důkaz. Protože $a_n - b_n = a_n + (-1).b_n$ a $\frac{a_n}{b_n} = a_n . \frac{1}{b_n}$, stačí ukázat pouze tvrzení *1)* a *3)* a speciální tvar tvrzení *4)* $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Tato tvrzení dokážeme nejdříve pro případ $a, b \in \mathbb{R}$.
Zapsáno formálně

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(|a_n - a| < \delta), \tag{3.4}$$

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_2)(\forall n > n_2)(|b_n - b| < \delta). \tag{3.5}$$

V případě limity součtu budeme chtít ukázat, že vzdálenost $(a_n + b_n)$ od $(a + b)$ je od jistého indexu n_0 počínaje menší než dané kladné ε. Z trojúhelníkové nerovnosti, 3.4 a 3.5 plyne

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \delta + \delta = 2\delta$$

pro každé přirozené n splňující $n > n_1$ a současně $n > n_2$.

Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ nejdříve vezmeme $\delta = \varepsilon/2$. Pak z 3.4 a 3.5 nalezneme n_1 a n_2. Definujeme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, je pro každé $n > n_0$ splněno $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. To ovšem znamená, že $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Pro limitu součinu posloupností ještě připomeneme, že konečná limita implikuje omezenost posloupnosti. Proto $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})(|b_n| \leq K)$. Odhadujeme teď vzdálenost $a_n . b_n$ od

$a.b$.

$$|a_n.b_n - a.b| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| =$$

$$= |a_n - a|.|b_n| + |a|.|b_n - b| \le |a_n - a|.K + |a|.|b_n - b| < K\delta + |a|\delta = (K + |a|)\delta.$$

Předchozí odhad platí opět pro všechna $n > n_1, n_2$.

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ položíme nejdříve $\delta = \varepsilon/(K + |a|)$. Z čísel n_1 a n_2 získaných z 3.4 a 3.5 definujeme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro každé $n > n_0$ je splněno $|(a_n.b_n) - (a.b)| < \varepsilon$, tj. $\lim(a_n b_n) = a.b$.

Aby podíl $\frac{1}{b}$ byl definován, musí být $b \neq 0$. Proto $\lim |b_n| = |b| > 0$. Zvolíme-li interval $(|b|/2, 3|b|/2)$ za okolí$H_{|b|}$ bodu $|b|$, dostaneme z definice limity, že existuje index n_3 takový, že pro všechna $n > n_3$ je $|b|/2 < |b_n|$. Odhadněme vzdálenost $1/b_n$ od $1/b$:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b|.|b_n|} < \frac{2\delta}{|b|^2} \ .$$

Tento odhad platí pro $n > n_3$ a současně $n > n_2$. Nyní pro libovolné kladné ε nejdříve položíme $\delta = |b|^2\varepsilon/2$. K tomuto δ podle 3.5 najdeme n_2 a definujeme $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$. Pak pro každé $n > n_0$ máme $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$, což znamená $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Ze zbylých možností, kdy alespoň jedna z limit a, b je $\pm\infty$, se budeme zabývat pouze případem $a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$. (Zbytek důkazu je přenechán čtenáři.) Napišme, co znamená, že posloupnost (b_n) má limitu $-\infty$:

$$(\forall \beta > 0)(\exists n_4)(\forall n > n_4)(b_n < -\beta). \tag{3.6}$$

Chceme teď ukázat, že $\lim(a_n + b_n) = -\infty$. Pro libovolné kladné α položme $\delta = 1$ a $\beta = \alpha + 1 + |a|$ a využijme 3.4 a 3.6. Pak pro $n > \max\{n_1, n_4\}$ dostaneme

$$a_n + b_n < a + \delta - \beta = a + 1 - \alpha - 1 - |a| \le -\alpha,$$

což znamená, že posloupnost $(a_n + b_n)$ má limitu $-\infty$.

Součin $a.(-\infty)$ je definován pouze pro případ $a \neq 0$. K libovolnému kladnému α položíme $\delta = |a|/2$ a $\beta = 2\alpha/|a|$. Pak pro $n > n_1$ máme

$a_n > a/2$ pro $a > 0$ a $a_n < a/2$ pro $a < 0$.

Vezmeme-li $n > \max\{n_1, n_4\}$ dostaneme

$a_n.b_n < a_n.(-\beta) < \frac{a}{2}.(-\beta) = -|a|\beta/2 = -\alpha$ pro $a > 0$, resp.

$a_n.b_n > a_n.(-\beta) > \frac{a}{2}.(-\beta) = |a|\beta/2 = \alpha$ pro $a < 0$.

To znamená v případě $a > 0$, že $\lim a_n b_n = -\infty$ a v případě $a < 0$, že $\lim a_n b_n = +\infty$.

Na závěr dokážeme, že z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne $\lim \frac{1}{b_n} = 0$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ vezměme $\beta = 1/\varepsilon$. Podle 3.6 existuje n_4 tak, že pro každé $n > n_4$ platí

$$b_n < -\beta \quad \Longrightarrow \quad b_n < 0 \text{ a } -\frac{1}{b_n} < \frac{1}{\beta} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{1}{\beta} = \varepsilon\ .$$

To už dokazuje, že $\lim \frac{1}{b_n} = 0$. □

Poznámka. Výraz $\frac{1}{0}$ není definován. Přesto lze zkoumáním znamének v posloupnosti (b_n) rozhodnout o $\lim \frac{1}{b_n}$, i když $\lim b_n = 0$. Zde samozřejmě uvažujeme $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Když všechny členy posloupnosti b_n jsou kladné, pak z nerovnosti $|b_n| < \varepsilon$ plyne, že $\frac{1}{b_n} = \left|\frac{1}{b_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy výraz $\frac{1}{b_n}$ je od jistého indexu větší než libovolné kladné číslo, což znamená, že $\lim \frac{1}{b_n} = +\infty$.

V případě, že všechny členy b_n jsou záporné, využijeme předchozího tvrzení pro kladnou posloupnost $(-b_n)$ a dostaneme $\lim \frac{1}{b_n} = \lim\,(-1)\frac{1}{-b_n} = (-1).(+\infty) = -\infty$.

Protože vynechání konečně mnoha členů posloupnosti nezmění její limitu, stačí v předchozích úvahách předpokládat, že posloupnost (b_n) je kladná, resp. záporná od jistého n_0 počínaje.

Zůstává tedy rozebrat případ, kdy nekonečně mnoho členů posloupnosti (b_n) je kladných a nekonečně mnoho členů záporných. To umožňuje vybrat z (b_n) posloupnost (b_{k_n}) kladných členů a posloupnost (b_{h_n}) záporných členů. Protože se jedná o vybrané posloupnosti, platí $\lim b_{k_n} = 0$ a $\lim b_{h_n} = 0$. Použitím předchozích úvah dostaneme

$$\lim \frac{1}{b_{k_n}} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim \frac{1}{b_{h_n}} = -\infty.$$

To ale znamená, že $\lim \frac{1}{b_n}$ neexistuje.

Věta 3.3.4. *Nechť (a_n) je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí*

$$\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}.$$

Důkaz. Jelikož posloupnost má nezáporné členy, je její limita nezáporná (rozmyslete si proč). Uvažujme nejdříve případ $a \in \mathbb{R}$. Zapišme to symbolicky:

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(|a_n - a| < \delta). \tag{3.7}$$

Budeme chtít ukázat, že i vzdálenost $\sqrt[k]{a_n}$ od $\sqrt[k]{a}$ lze udělat libovolně malou.

1) Nechť $a \in (0, +\infty)$.

Pro následující úpravy jsme použili vzorec

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}),$$

kde jako A jsme vzali $\sqrt[k]{a_n}$ a jako B jsme vzali $\sqrt[k]{a}$. Odhadujme

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \frac{|a_n - a|}{(a_n)^{\frac{k-1}{k}} + (a_n)^{\frac{k-2}{k}} a^{\frac{1}{k}} + \ldots + (a_n)^{\frac{1}{k}} a^{\frac{k-2}{k}} + a^{\frac{k-1}{k}}} \leq \frac{|a_n - a|}{a^{\frac{k-1}{k}}} < \frac{\delta}{a^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Pro libovolné kladné ε položíme $\delta = \varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}$ a z 3.7 dostaneme existenci takového n_1, že pro každé $n > n_1$ platí $|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| < \varepsilon$, což znamená, že $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

2) Nechť $a = 0$.
Protože $|a_n| < \delta$ implikuje $|\sqrt[k]{a_n}| < \sqrt[k]{\delta}$, stačí ke kladnému ε položit $\delta = \varepsilon^k$ a aplikovat 3.7, abychom dostali $\lim \sqrt[k]{a_n} = 0$.

Zbývá dokázat, že v případě nekonečné limity posloupnosti (a_n) má i posloupnost k-tých odmocnin limitu $+\infty$. Nechť tedy $a = +\infty$.
Zapsáno symbolicky

$$(\forall \beta > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(a_n > \beta)\ . \tag{3.8}$$

Z nerovnosti $a_n > \beta$ plyne $\sqrt[k]{a_n} > \sqrt[k]{\beta}$. Když pro libovolné kladné α položíme $\beta = \alpha^k$, dostaneme z 3.8 existenci n_1 takového, že $\sqrt[k]{a_n} > \alpha$ pro každé $n > n_1$, což znamená $\lim \sqrt[k]{a_n} = +\infty$. □

Vztahy nerovností mezi členy dvou posloupností se přenášejí i na vztah mezi limitami a obráceně. To nám umožní odvodit další užitečné věty pro výpočet limity, tzv. sendvičové věty.

Věta 3.3.5. *Nechť reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Platí*

$$\lim a_n < \lim b_n \qquad \Longrightarrow \qquad (\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n < b_n).$$

Důkaz. Označme $a = \lim a_n$ a $b = \lim b_n$. Z vlastností okolí už víme, že ze vztahu $a \neq b$ plyne existence disjunktních okolí $H_a^{(0)}$ a $H_b^{(0)}$. Protože navíc je $a < b$, dostaneme

$$(\exists H_a^{(0)})(\exists H_b^{(0)})(\forall x \in H_a^{(0)})(\forall y \in H_b^{(0)})(x < y). \tag{3.9}$$

Z definice limity najdeme k okolí $H_a^{(0)}$ číslo n_1 takové, že pro každé $n > n_1$ je $a_n \in H_a^{(0)}$ a podobně k okolí $H_b^{(0)}$ najdeme n_2 tak, že pro každé $n > n_2$ je $b_n \in H_b^{(0)}$. Stačí nyní zvolit $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a dostaneme z 3.9 už tvrzení věty. □

Poznámka. Uvažujme posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$ a $\left(\frac{2}{n}\right)$. I když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, ostrá nerovnost neplatí mezi limitami těchto posloupností. Proto předchozí větu nelze vyslovit jako ekvivalenci. Obrácenou implikaci však lze vyslovit pro neostrou nerovnost.

Věta 3.3.6. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Platí*

$$(\exists n_1)(\forall n > n_1, n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n \leq \lim b_n.$$

Důkaz. (sporem) Nechť pro každé $n > n_1$ platí $a_n \leq b_n$ a nechť $\lim a_n > \lim b_n$. Pak z předchozí věty od jistého indexu n_0 počínaje je $a_n > b_n$. Tedy pro $n > \max\{n_1, n_0\}$ má platit $a_n > b_n$ a $a_n \leq b_n$ – spor. □

Věta 3.3.7. (věta o limitě sevřené posloupnosti) *Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou reálné posloupnosti, pro které platí:*

1) $(\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n \leq c_n)$;

2) posloupnosti (a_n) a (c_n) mají stejnou limitu $a \in \mathbb{R}$.

Pak existuje limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim b_n = a$.

Důkaz. Z definice limity dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon), \tag{3.10}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2)(\forall n > n_2)(a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon). \tag{3.11}$$

Využijme nerovnost z předpokladu *1)* a nerovnosti v 3.10 a 3.11. Pro $n > n_0, n_1, n_2$ dostaneme

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon.$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ tedy lze najít $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ tak, že pro každé $n > n_3$ je

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |b_n - a| < \varepsilon \ .$$

To však znamená, že $\lim b_n = a$. □

Věta 3.3.8. *Nechť pro členy reálných posloupností (a_n) a (b_n) platí $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ od jistého n_0 počínaje. Pak*

1) $\lim a_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim b_n = +\infty$,

2) $\lim b_n = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n = -\infty$.

Důkaz. Nechť $\lim a_n = +\infty$; symbolicky $(\forall \alpha > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(a_n > \alpha)$. Z předpokladu věty dostaneme, že pro $n > \max\{n_0, n_1\}$ platí také $b_n > \alpha$, což znamená, že $\lim b_n = +\infty$. Důkaz druhé části tvrzení je analogický. □

Teď v několika příkladech aplikujeme dokázané věty na výpočet důležitých limit posloupností.

Příklad 3.3.9. Platí

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Abychom to dokázali, uvažujme posloupnost (h_n) definovanou vztahem

$$h_n = \sqrt[n]{n} - 1.$$

Zřejmě $h_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} h_n^n \ > \ 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}\, h_n^2\ .$$

Po vydělení nerovnosti číslem $\frac{n(n-1)}{2}$ a odmocněním (to lze provést, protože $h_n \geq 0$) dostaneme

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq h_n \geq 0\ .$$

Jelikož limity posloupností svírajících posloupnost (h_n) zdola i shora jsou rovny stejnému číslu 0, je podle věty o limitě sevřené posloupnosti

$$\lim h_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim \sqrt[n]{n} = \lim(1 + h_n) = 1.$$

Příklad 3.3.10. Pro každé $a \in \mathbb{R}, a > 0$, je

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Uvažujme nejdříve $a \geq 1$. Pak pro každé $n > a$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Opět posloupnosti (1) a $(\sqrt[n]{n})$ svírající naší posloupnost zdola, resp. shora mají stejnou limitu 1, a proto z věty o limitě sevřené posloupnosti je i $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Když $0 < a < 1$, pak $\frac{1}{a} > 1$ a z předchozího plyne, že $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, což dává

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Příklad 3.3.11. Platí

$$\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Nejdříve si uvědomíme z tvaru paraboly $f(x) = x(n+1-x)$, že

$$k(n+1-k) = f(k) \geq f(1) = n \quad \text{pro každé } k = 1, 2 \ldots, n.$$

To nám umožní odhadnout

$$(n!)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} (n+1-k)\right) = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \geq n^n.$$

$2n$-tá odmocnina z této nerovnosti dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}.$$

Protože $\lim \sqrt{n} = +\infty$, je podle věty 3.3.8 i limita posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$ rovna $+\infty$.

Příklad 3.3.12. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim\ a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a \leq -1. \end{cases}$$

Když $a = 0$ nebo $a = 1$, jedná se o konstantní posloupnost a o konstantních posloupnostech jsme už ukázali, že jejich limita je rovna dané konstantě. Pro $a = -1$ dostaneme posloupnost $\big((-1)^n\big)$, o které jsme ukázali, že nemá limitu. Budeme proto diskutovat jenom případ $a \neq 0, \pm 1$.

1) Nechť $0 < |a| < 1$.

Platí $|a^{n+1}| = |a^n|.|a| < |a^n|$, tj. posloupnost $\big(|a^n|\big)$ je klesající. Navíc je to posloupnost omezená, protože pro její členy platí $0 < |a^n| < |a|$. Z věty o limitě monotonní posloupnosti dostaneme, že existuje konečná limita $l = \lim |a^n| \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\big(|a^{n+1}|\big)$ je vybraná z posloupnosti $\big(|a^n|\big)$, a proto má stejnou limitu. Celkově

$$l = \lim |a^{n+1}| = \lim |a|.|a^n| = |a|. \lim |a^n| = |a|.l\ .$$

Využili jsme zde větu o limitě součinu dvou posloupností, konkrétně konstantní posloupnosti $(|a|)$ a posloupnosti $\big(|a^n|\big)$. Rovnost $l = |a|.l \Leftrightarrow (1 - |a|).l = 0$ implikuje $l = 0$, tj. $\lim |a^n| = 0$. Z věty o limitě posloupnosti absolutních hodnot plyne, že i $\lim a^n = 0$, což jsme měli ukázat.

2) Nechť $a > 1$.

Teď (a^n) je rostoucí posloupnost, zdola omezená např. číslem $a > 1$. Existuje tedy

$\lim a^n = l$. Z věty o nerovnostech mezi limitami musí být limita $l \geq a$. Opět platí $l = \lim a^{n+1} = a. \lim a^n = a.l$. Rovnost $l = a.l$ je pro $l \geq a > 1$ splněna pouze tak, že $l = \lim a^n = +\infty$.

3) Nechť $a < -1$.
Vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)$ lze přepsat jako $\left((a^2)^n\right)$, kde teď $a^2 > 1$ a podle bodu 2) důkazu je $\lim a^{2n} = +\infty$.
Spočítejme limitu jiné vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)$.

$$\lim a^{2n+1} = a \lim a^{2n} = a.(+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme tedy dvě posloupnosti vybrané z posloupnosti (a^n), a tyto posloupnosti mají různé limity. To implikuje, že $\lim a^n$ neexistuje.

Než se pustíme do dalšího příkladu, odvodíme pomocné tvrzení o limitě součinu dvou posloupností (a_n) a (b_n).

Lemma 3.3.13. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti,* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost (b_n) je omezená. Pak* $\lim(a_n b_n) = 0$.

Důkaz. Omezenost (b_n) znamená, že $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|b_n| \leq K)$. Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| K.$$

Využijeme větu, že $\lim a_n = 0$, právě když $\lim |a_n| = 0$. Limita levé strany nerovnosti je 0. Spočítejme limitu pravé strany nerovnosti. Dostáváme

$$\lim |a_n| K = K \lim |a_n| = K.0 = 0.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne $\lim |a_n b_n| = 0$ a z věty o limitě absolutní hodnoty zase $\lim a_n b_n = 0$. □

Poznámka. Všimněme si, že když $\lim a_n = 0$, umožňuje nám předchozí lemma vypočítat limitu součinu $(a_n b_n)$ i v případech, kdy $\lim b_n$ neexistuje. Od posloupnosti (b_n) je požadována pouze omezenost.

Příklad 3.3.14. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Pak pro limitu komplexní posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim\ a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ \infty & \text{pro } |a| > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } |a| = 1, a \neq 1. \end{cases}$$

Využijeme toho, že každé komplexní číslo a lze zapsat v tzv. goniometrickém tvaru jako $a = |a|(\cos\phi + i\sin\phi)$, kde úhel $\phi \in \langle 0, 2\pi)$, a rovněž využijeme platnosti Moivreovy věty

$$a^n = |a|^n\big(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\big).$$

1) Nechť $|a| < 1$.
Protože $\lim |a|^n = 0$ a posloupnosti $\big(\cos(n\phi)\big)$ a $\big(\sin(n\phi)\big)$ jsou omezené, plyne z lemmatu

$$\lim \operatorname{Re}(a^n) = \lim |a|^n \cos(n\phi) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim \operatorname{Im}(a^n) = \lim |a|^n \sin(n\phi) = 0.$$

Pro komplexní posloupnost platí věta, že $\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n$, pokud limity napravo jsou konečné. Máme tedy přímo, že $\lim a^n = 0$.

2) Nechť $|a| > 1$.
Připomeňme, že pro komplexní posloupnosti platí (viz věta 3.2.15): $\lim a_n = \infty \iff \lim |a_n| = +\infty$.
Jelikož $\lim |a^n| = \lim |a|^n = +\infty$, máme dokázáno, že $\lim a^n = \infty$.

3) Nechť $|a| = 1$, tj. $a = \cos\phi + i\,\sin\phi$.
Kdyby existovala $l = \lim a^n$, pak $|l| = \lim |a^n| = \lim 1 = 1$. Navíc by pro limitu l muselo platit

$$l = \lim a^{n+1} = a.\lim a^n = a.\,l.$$

Protože $l \in \mathbb{C}, l \neq 0$, musí být $a = 1$. Odvodili jsme, že pro $|a| = 1$ existuje $\lim a^n$ pouze v případě, kdy $a = 1$.

Příklad 3.3.15. Nechť $\phi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.
Posloupnost $\big(\cos(n\phi)\big)$ ani posloupnost $\big(\sin(n\phi)\big)$ nemá limitu.

Předpoklad $\phi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ zaručuje, že komplexní číslo $a = \cos\phi + i\sin\phi \neq \pm 1$. Z předchozího příkladu už víme, že neexistuje limita posloupnosti $a^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$. To znamená, že neexistuje alespoň jedna z limit $\lim \cos(n\phi)$ a $\lim \sin(n\phi)$.

Předpokládejme, že by $\lim \cos(n\phi)$ existovala a byla rovna l. Protože posloupnost $\big(\cos(n\phi)\big)$ je omezená, musela by být limita $l \in \mathbb{R}$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti by také muselo platit, že $\lim \cos((n+1)\phi) = l$. Ze součtového vzorce pro funkci kosinus $\cos((n+1)\phi) = \cos(n\phi)\cos\phi - \sin(n\phi)\sin\phi$ však dostaneme

$$\sin(n\phi) = \frac{1}{\sin\phi}\,\Big(\cos(n\phi)\cos\phi - \cos((n+1)\phi)\Big).$$

Z existence $\lim \cos(n\phi)$ by tedy plynula i existence $\lim \sin(n\phi)$ - a to je spor.

Ke sporu analogicky dovede i předpoklad existence limity posloupnosti $\big(\sin(n\phi)\big)$.

Další příklad jsme zařadili mezi "důležité příklady" spíše z důvodu důležitosti použité metody než z důvodu samotného výsledku. Ukazujeme, jak si počínat při výpočtu **limit rekurentně zadaných posloupností**.

Příklad 3.3.16. Uvažujme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Ze zadání je jasné, že (a_n) je kladná posloupnost. Kdybychom věděli, že limita a posloupnosti existuje, vypočítali bychom ji ze vztahu $a = \sqrt{2+a}$, který má v $\overline{\mathbb{R}}$ dvě řešení, a to $a = 2$ a $a = +\infty$. Zkoumání omezenosti, resp. neomezenosti by nám napovědělo, které z řešení vybrat jako výsledek.

Jedním z "vynucovacích" prostředků pro existenci limity je monotonie posloupnosti. Zkusme ověřit, že posloupnost (a_n) je rostoucí, tj.

$$a_n \leq a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \iff a_n^2 \leq a_n + 2 \iff 0 \leq (2 - a_n)(a_n + 1) \iff a_n \leq 2.$$

Pro předchozí ekvivalence jsme využili toho, že $a_n > 0$.

Zkusme ukázat indukcí, že

$$a_n \leq 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n = 1$ to plyne ze zadání. Z indukčního předpokladu $a_n \leq 2$ a z rekurence máme $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$.

Shrneme: Ukázali jsme, že posloupnost (a_n) je omezená shora závorou 2. To implikuje, že (a_n) je rostoucí, a tedy existenci limity, která nemůže být $+\infty$. Proto

$$\lim a_n = 2.$$

3.4 Eulerovo číslo e

Definujme dvě reálné posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ předpisy

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{a} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

O těchto posloupnostech dokážeme několik tvrzení:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ostře rostoucí:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) <$$

$$< \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

Nerovnost plyne z toho, že jsme zvětšili každý člen součinu $1 - \frac{j}{n}$ na $1 - \frac{j}{n+1}$ a navíc v sumě máme o jeden kladný sčítanec víc.
Posloupnost (a_n) má tedy limitu.

2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ostře klesající:

$$b_{n+1} < b_n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} = 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} + \text{další členy binomické formule.}$$

Protože všechny "další členy"jsou kladná čísla, nerovnost platí.
Existuje tedy limita posloupnosti (b_n).

3. Protože $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ pro každé n přirozené, jsou obě posloupnosti omezené a jejich limity jsou konečné. Navíc platí $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, což implikuje, že posloupnosti (a_n) a (b_n) mají stejnou limitu. Společnou limitu označujeme e a nazýváme **Eulerovo číslo**. Symbolicky

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

4. Z typu monotonie posloupnosti (a_n) a (b_n) dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

To nám umožní určit přibližnou hodnotu e: pro $n = 1$ dostaneme $2 < e < 4$, pro $n = 2$ dostaneme $2.25 < e < 3.375$, atd. Vzdálenost dolního a horního odhadu čísla e je

$$b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{e}{n} < \frac{4}{n}.$$

Z druhé strany

$$b_n - a_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).b_n > \frac{e}{n+1} > \frac{2}{n+1}.$$

Tedy ani po výpočtu a_{1000} a b_{1000} nevíme, jak vypadá třetí místo za desetinnou čárkou v Eulerově čísle e. Pro efektivní určení čísla e s dostatečnou přesností lépe poslouží posloupnost (c_n) definovaná předpisem

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Uveďme důležité vlastnosti (c_n) :

1. Posloupnost (c_n) je ostře rostoucí.
2. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí $a_n < c_n$, protože

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = c_n.$$

3. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $c_m < e$.
Pro důkaz tohoto tvrzení zafixujme $m \in \mathbb{N}$ a vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}, n > m$. Platí

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) > \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Nalevo i napravo máme dvě posloupnosti s proměnným indexem n, obě tyto posloupnosti mají limitu. Přičemž limita levé posloupnosti (a_n) je e, limita napravo je $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = c_m$. Z věty o nerovnostech mezi limitami dostaneme $e \geq c_m$, a to pro libovolné $m \in \mathbb{N}$, které jsme fixovali. Protože posloupnost (c_n) je ostře rostoucí, nemůže se stát, aby $c_{m_0} = e$, protože pak $c_{m_0+1} > e$, a to by byl spor s právě dokázaným tvrzením.

Z vlastností 2) a 3) posloupnosti (c_n) víme, že $a_n < c_n < e$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Z věty o limitě sevřené posloupnosti pak plyne

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Nyní ukážeme, že posloupnost (c_n) konverguje k číslu e mnohem rychleji, než posloupnosti (a_n) a (b_n).

Lemma 3.4.1. *Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \;\leq\; \frac{1}{m.m!}.$$

Důkaz. Opět fixujeme $m \in \mathbb{N}$, vezmeme libovolné $n > m, n \in \mathbb{N}$ a odhadujeme

$$c_n - c_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots n} \right) <$$

$$< \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+1)^{n-m}} \right) = \frac{1}{m!} \frac{1}{m+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{m+1}} < \frac{1}{m.m!}.$$

Když pro fixované m spočítáme limitu pravé a levé strany nerovnosti pro $n \mapsto +\infty$, dostaneme tvrzení lemmatu. $\square$

Například pro $n = 6$ je rozdíl $e - c_6$ menší než $\frac{1}{6.6!} < 0.00024$. Tedy hodnoty $c_6 = 2,71805\bar{5}$ a čísla e zaokrouhleny na 3 desetinná místa se shodují.

Věta 3.4.2. *Číslo e je iracionální.*

Důkaz. (sporem) Nechť $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Protože $2 < e = \frac{p}{q} < 3$, je jmenovatel $q \geq 2$. Z předchozího lemmatu dostaneme

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q.q!}.$$

Vynásobením celé nerovnosti číslem $q!$ dostaneme

$$0 < p.(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \leq \frac{1}{q},$$

přičemž prostřední výraz je celé číslo, které má být kladné a současně menší nebo rovno $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, to je spor. $\square$

Poznámka. Protože číslo e je iracionální, tvrzení lemmatu 3.4.1 lze zesílit na ostrou nerovnost $e - c_m < \frac{1}{m.m!}$.

3.5 Limes superior a limes inferior reálné posloupnosti

Definice 3.5.1. Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ nazveme hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n), když existuje posloupnost (a_{k_n}) vybraná z (a_n), pro niž $a = \lim a_{k_n}$.

Poznámka. Když posloupnost (a_n) má limitu, pak její jedinou hromadnou hodnotou je hodnota limity.

Příklad 3.5.2. 1) Posloupnost $\big((-1)^n\big)$ má dvě hromadné hodnoty, a to 1 a -1.
2) Posloupnost $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ má nekonečně mnoho hromadných hodnot, a to $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Příklad 3.5.3. Ukážeme, že množina hromadných hodnot posloupnosti

$$a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$$

je celý interval $\langle 0,1\rangle$, tedy nespočetná množina. Pro $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ uvažujme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel

$$k_n = n^2 + 2[\alpha n]\ .$$

Jelikož

$$n^2 \leq n^2 + 2[\alpha n] < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\,,$$

je $[\sqrt{k_n}] = n$.

Dostaneme

$$\sqrt{k_n} - [\sqrt{k_n}] = \sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} - n = \frac{2[\alpha n]}{\sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} + n}.$$

Využijeme toho, že pro celou část $[x]$ platí $x - 1 < [x] \leq x$ a odhadneme

$$\frac{2(\alpha n - 1)}{2n+1} = \frac{2(\alpha n - 1)}{\sqrt{n^2 + 2n + 1} + n} \leq \frac{2[\alpha n]}{\sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} + n} \leq \frac{2\alpha n}{\sqrt{n^2} + n} = \alpha.$$

Jelikož $\lim \frac{2(\alpha n-1)}{2n+1} = \alpha$, sevřeli jsme posloupnost $\sqrt{k_n} - [\sqrt{k_n}]$ mezi dvě posloupnosti se stejnou limitou, a tedy podle věty 3.3.7 je $\lim a_{k_n} = \alpha$.

Věta 3.5.4. *Každá posloupnost má hromadnou hodnotu. Přitom platí: množina všech hromadných hodnot dané posloupnosti má největší a nejmenší prvek. (Největším, resp. nejmenším prvkem může být i $\pm\infty$).*

Důkaz. I) Nejdříve předpokládejme, že posloupnost (a_n) není omezená shora, tj.

$$(\forall M)(\exists n \in \mathbb{N})(a_n > M). \tag{3.12}$$

Když položíme $M = 1$, najdeme $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $a_{k_1} > 1$. Pak zvolíme $M = \max\{2, a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}\}$ a opět podle 3.12 nalezneme k_2 tak, že $a_{k_2} > M \geq 2$. Z toho, jak jsme volili M, teď plyne, že $k_2 > k_1$. Další M položíme $M = \max\{3, a_1, a_2, \ldots, a_{k_2}\}$ a najdeme $k_3 > k_2$ atd. Celkově dostaneme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) takovou, že $a_{k_n} > n$. To ale podle věty 3.3.8 znamená, že $\lim a_{k_n} = +\infty$. Tedy $+\infty$ je hromadná hodnota posloupnosti (a_n); zřejmě je to největší hromadná hodnota.

II) Nechť posloupnost (a_n) je omezená shora. Pak $\sup\{a_k | k \in \mathbb{N}\} < +\infty$ a má smysl definovat reálnou posloupnost (β_n) předpisem

$$\beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \sup\{a_k | k \geq n\}.$$

Jelikož množina $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$ je podmnožinou množiny $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, je $\beta_{n+1} \leq \beta_n$ pro každé n přirozené. Tedy posloupnost (β_n) je klesající a tudíž má limitu, označme $\beta = \lim \beta_n$. Limita klesající posloupnosti může nabývat pouze reálných hodnot nebo $-\infty$. Rozlišíme dva případy.

II a) Nechť $\beta = -\infty$. Pak z definice limity plyne

$$(\forall \alpha > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\beta_n < -\alpha).$$

Z první vlastnosti suprema pro β_n dostaneme $(\forall k \geq n)(a_k \leq \beta_n)$. To dohromady implikuje

$$(\forall \alpha > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(a_n < -\alpha) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim a_n = -\infty.$$

Z poznámky za definicí hromadné hodnoty plyne, že množina hromadných hodnot má jediný prvek $-\infty$, a ten je tedy i jejím největším prvkem.

II b) Nechť $\beta \in \mathbb{R}$. Z definice limity dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon). \tag{3.13}$$

Z druhé vlastnosti suprema pro každé β_n máme $(\exists k \geq n)(\beta - \varepsilon < a_k \leq \beta_n)$. Celkově

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\exists k \geq n)(\beta - \varepsilon < a_k < \beta + \varepsilon) \tag{3.14}$$

Když v 3.14 vezmeme $\varepsilon = 1$, najdeme n_0 a k němu můžeme vzít libovolné $n > n_0$. Pak existuje k_1 tak, že $\beta - 1 < a_{k_1} < \beta + 1$.

Když aplikujeme 3.14 na $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nalezneme opět nějaké n_0, k němu pak zvolíme $n > \max\{n_0, k_1\}$ a najdeme $k_2 \geq n > k_1$ takové, že $\beta - \frac{1}{2} < a_{k_2} < \beta + \frac{1}{2}$. Takto postupujeme pro další $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 3, 4, \ldots$. Dostaneme tak ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) s vlastností

$$\beta - \frac{1}{n} < a_{k_n} < \beta + \frac{1}{n}.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti už plyne, že $\lim a_{k_n} = \beta$.

Ukázali jsme tedy, že β je hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n). Ještě ukážeme sporem, že je to největší hromadná hodnota. Pro spor předpokládejme, že nějaké $\gamma > \beta$ je také hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n). Zajisté nalezneme kladné ε tak, aby $\beta < \beta + \varepsilon < \gamma$. Z 3.13 plyne, že od jistého n_0 počínaje je $\beta_n < \beta + \varepsilon$, a z první vlastnosti suprema vztažené k β_n pak $a_n \leq \beta_n < \beta + \varepsilon$. Tedy existuje pouze konečně mnoho členů posloupnosti (a_n) ležících v intervalu $(\beta + \varepsilon, +\infty)$, kam patří i γ. Takové γ nemůže být limitou žádné posloupnosti vybrané z (a_n) - spor.

Podobně lze dokázat i existenci nejmenší hromadné hodnoty. $\square$

Předchozí věta nás opravňuje závést následující pojmy.

Definice 3.5.5. Největší hromadnou hodnotu posloupnosti (a_n) nazýváme **limes superior** posloupnosti (a_n) a značíme $\limsup a_n$ nebo také $\overline{\lim}\, a_n$.
Nejmenší hromadnou hodnotu posloupnosti (a_n) nazýváme **limes inferior** posloupnosti (a_n) a značíme $\liminf a_n$ nebo také $\underline{\lim}\, a_n$.

Z definice a důkazu předchozí věty plyne hned několik základních **vlastností** $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ (důkazy jsou přenechány čtenáři):

1. $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují na rozdíl od limity pro každou reálnou posloupnost (a_n).

2. Pro každou posloupnost (a_{k_n}) vybranou z (a_n) platí

$$\liminf a_n \leq \liminf a_{k_n} \leq \limsup a_{k_n} \leq \limsup a_n.$$

3. $\limsup a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)$ není omezená shora.
   $\liminf a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)$ není omezená zdola.

4. $\limsup a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim a_n = -\infty.$
   $\liminf a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim a_n = +\infty.$

5. Hodnotu limes superior posloupnosti (a_n) lze charakterizovat takto:

$$\beta = \limsup a_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} 1)\ \ (\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' > \beta)(\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n < \beta') \\[2ex] 2)\ \ (\forall \beta'' \in \mathbb{R}, \beta'' < \beta)(\exists_\infty n)(a_n > \beta''). \end{array}$$

6. Hodnotu limes inferior posloupnosti (a_n) lze charakterizovat takto:

$$\alpha = \liminf a_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} 1)\ \ (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n > \alpha') \\[2ex] 2)\ \ (\forall \alpha'' \in \mathbb{R}, \alpha'' > \alpha)(\exists_\infty n)(a_n < \alpha''). \end{array}$$

Věta 3.5.6. *Pro každou reálnou posloupnost (a_n) platí:*

$$\lim a_n \text{ existuje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \limsup a_n = \liminf a_n.$$

V případě, že $\lim a_n$ existuje, je $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je zřejmá. Dokazujeme proto $(\Leftarrow)$. Rozlišíme 2 případy:
1) Nechť $\limsup a_n = \liminf a_n = a$, kde $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$.
Bod 4) z výčtu základních vlastností limsup a liminf implikuje, že $\lim a_n$ existuje a je a.
2) Nechť $\limsup a_n = \liminf a_n = a \in \mathbb{R}$.
Pro kladné ε položíme do charakteristiky limsup, jak je uvedená v bodě 5), za β' číslo

$a + \varepsilon > a$. To implikuje existenci n_1 takového, že pro každé $n > n_1$ je $a_n < a + \varepsilon$. Využijeme také charakteristiku liminf v bodě 6). Za $\alpha' < a$ vezmeme $\alpha' = a - \varepsilon$. Existuje n_2 tak, že pro každé $n > n_2$ je $a_n > a - \varepsilon$. Když nyní definujeme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, dostaneme:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim a_n = a$$

a to jsme chtěli dokázat. $\square$

Vypočítat limes superior nebo limes inferior může být velmi složité. V některých případech pomůže následující věta.

Věta 3.5.7. *Nechť posloupnosti* $(a_{k_n^{(1)}})$, $(a_{k_n^{(2)}}), \ldots, (a_{k_n^{(r)}})$ *vybrané z posloupnosti* (a_n) *splňují:*

i) pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *existuje* $\lim a_{k_n^{(j)}} = a^{(j)}$

ii) $\{k_n^{(1)}\} \cup \{k_n^{(2)}\} \cup \ldots \cup \{k_n^{(r)}\} = \mathbb{N}$.

Pak limes superior posloupnosti (a_n) *je největší a limes inferior nejmenší z hodnot* $a^{(1)}$, $a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a^{(1)} \geq a^{(2)} \geq \ldots \geq a^{(r)}$. Chceme ukázat, že $a^{(1)}$ je limes superior posloupnosti (a_n), tj. že je to největší hromadná hodnota. Z definice hromadné hodnoty je zřejmé, že $a^{(1)}$ je hromadnou hodnotou. Potřebujeme tedy ukázat, že žádné jiné $\gamma > a^{(1)}$ není hromadnou hodnotou. Pokud je $a^{(1)} = +\infty$, není co dokazovat. Předpokládejme proto, že $a^{(1)} < +\infty$ a uvažujme $\gamma > a^{(1)}$. Vezměme λ tak, aby $a^{(1)} < \lambda < \gamma$. Protože $\lim a_{k_n^{(j)}} = a^{(j)} \leq a^{(1)} < \lambda$, dostaneme z definice limity pro každé $j = 1, 2, \ldots, r$ existenci $n_j \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall n > n_j)(a_{k_n^{(j)}} < \lambda). \tag{3.15}$$

Položme $n_0 = \max\{k_{n_1}^{(1)}, k_{n_2}^{(2)}, \ldots, k_{n_r}^{(r)}\}$. Uvažujme libovolné přirozené $n > n_0$. Podle předpokladu ii) věty k tomuto n nalezneme $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ a $i \in \mathbb{N}$ tak, že $n = k_i^{(j)}$. Jelikož posloupnost indexů $(k_n^{(j)})$ je ostře rostoucí, dostaneme z nerovnosti $k_i^{(j)} = n > n_0 \geq k_{n_j}^{(j)}$, že $i > n_j$. To podle 3.15 znamená, že $a_{k_i^{(j)}} < \lambda$, tedy $a_n = a_{k_i^{(j)}} < \lambda$. Celkově máme

$$(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n < \lambda).$$

To znamená, že napravo od čísla λ (kde leží i γ) padne pouze konečně mnoho členů posloupnosti (a_n). To vylučuje, aby γ bylo hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n).

Obdobně se dokáže, že $a^{(r)}$ je limes inferior posloupnosti (a_n). $\square$

Příklad 3.5.8. Určeme limsup a liminf posloupnosti $(a_n) = \left(2^{n \sin \frac{\pi n}{2}}\right)$.

Uvažujme tři vybrané posloupnosti (a_{2n}), (a_{4n-1}), (a_{4n-3}). Dostaneme

$$\lim a_{2n} = \lim 2^0 = 1, \quad \lim a_{4n-1} = \lim 2^{-(4n-1)} = 0, \quad \lim a_{4n-3} = \lim 2^{4n-3} = +\infty.$$

Protože je $\{2n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{4n-1|n \in \mathbb{N}\} \cup \{4n-3|n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, podle předchozí věty platí $\operatorname{limsup} a_n = +\infty$ a $\operatorname{liminf} a_n = 0$.

Důsledek 3.5.9. *Nechť pro posloupnosti* $(a_{k_n^{(1)}})$, $(a_{k_n^{(2)}}), \ldots, (a_{k_n^{(r)}})$ *vybrané z posloupnosti* (a_n) *platí:*

i) $(\exists a \in \overline{\mathbb{R}})(\forall j \in \{1, 2, \ldots, r\})(\lim a_{k_n^{(j)}} = a)$;

ii) $\{k_n^{(1)}\} \cup \{k_n^{(2)}\} \cup \ldots \cup \{k_n^{(r)}\} = \mathbb{N}$.

Pak existuje limita posloupnosti (a_n) *a platí* $\lim a_n = a$.

Zavedení pojmů limes superior a limes inferior nám umožní dokázat Stolzovu větu pro výpočet limity posloupnosti. Pro čtenáře, jenž se už setkal s limitou funkce, poznamenejme, že Stolzova věta je obdobou l'Hospitalova pravidla, které je důležitou pomůckou pro výpočet limity funkce.

Věta 3.5.10. (Stolzova) *Nechť* (a_n) *a* (b_n) *jsou reálné posloupnosti splňující:*

i) (b_n) *je ostře rostoucí posloupnost nenulových čísel taková, že* $\lim b_n = +\infty$;

ii) existuje $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

Pak existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$ *a platí*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Důkaz. Věta bude plynout z obecnějšího tvrzení, které dokážeme:

$$\operatorname{liminf} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \le \operatorname{liminf} \frac{a_n}{b_n} \le \operatorname{limsup} \frac{a_n}{b_n} \le \operatorname{limsup} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Prostřední nerovnost je samozřejmým důsledkem definice liminf a limsup. Sporem dokážeme poslední nerovnost.

Nechť platí $\operatorname{limsup} \frac{a_n}{b_n} > \operatorname{limsup} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Zvolme $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\operatorname{limsup} \frac{a_n}{b_n} > \gamma > \operatorname{limsup} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \ . \tag{3.16}$$

Protože limes superior posloupnosti je hromadná hodnota, je pro nějakou ostře rostoucí posloupnost indexů (k_n)

$$\operatorname{limsup} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{k_n}}{b_{k_n}}.$$

Z první vlastnosti limes superior víme, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k > n_0, k \in \mathbb{N}) \left(\frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} < \gamma \right).$$

Protože (b_n) je ostře rostoucí posloupnost, jmenovatel $b_{k+1} - b_k$ je kladný a po vynásobení dostaneme nerovnost $a_{k+1} - a_k < \gamma(b_{k+1} - b_k)$.
Napišme tuto nerovnost pro $k = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \ldots, k_n - 1$, kde $n > n_0$, a sečtěme:

$$a_{k_n} - a_{n_0+1} = \sum_{k=n_0+1}^{k_n-1} (a_{k+1} - a_k) < \gamma \sum_{k=n_0+1}^{k_n-1} (b_{k+1} - b_k) = \gamma(b_{k_n} - b_{n_0+1}) \ . \tag{3.17}$$

Jelikož $\lim b_n = +\infty$, jsou členy posloupnosti (b_n) od jistého n_1 kladné. Vydělením nerovnosti 3.17 číslem b_{k_n} a malou úpravou dostaneme:

$$\text{pro každé } \ n \in \mathbb{N}, n > \max\{n_0, n_1\} \qquad \text{platí} \qquad \frac{a_{k_n}}{b_{k_n}} < \gamma + \frac{a_{n_0+1}}{b_{k_n}} - \gamma \frac{b_{n_0+1}}{b_{k_n}}.$$

Spočítejme limitu pravé a levé strany nerovnosti pro $n \mapsto +\infty$. Zdůrazněme, že n_0 je pevné. Využijeme předpokladu věty, že $\lim b_n = +\infty$. Z věty o nerovnosti mezi limitami dostaneme

$$\text{limsup} \, \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{k_n}}{b_{k_n}} \leq \gamma \qquad\qquad \text{– a to je spor s 3.16.}$$

Rovněž sporem lze dokázat nerovnost mezi liminf $\frac{a_n}{b_n}$ a liminf $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, to však je ponecháno čtenáři. □

Příklad 3.5.11. Na výpočet následující limity

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

lze použít Stolzovou větu, protože $(\sqrt{n^3})$ je ostře rostoucí posloupnost s limitou $+\infty$ a také druhý předpoklad Stolzovy věty je splněn:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3}} = \lim \frac{\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(n + 1 + \sqrt{n(n+1)} + n\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{2 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{2}{3}.$$

Ze Stolzovy věty tedy plyne, že i $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$.

Věta 3.5.12. (Cauchyův vzorec) *Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel taková, že existuje $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a platí*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}.$$

Důkaz. Opět dokážeme platnost nerovností

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \ ,$$

z kterých plyne tvrzení věty. Proto už jenom stručně. Kdyby platilo

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > \gamma > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{3.18}$$

pro nějaké $\gamma \in \mathbb{R}$, pak by pro každé $k \in \mathbb{N}$ od jistého n_0 počínaje bylo $\gamma > \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Po vynásobení těchto nerovností pro $k = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n - 1$ dostaneme

$$\gamma^{n-n_0-1} > \frac{a_n}{a_{n_0+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_{n_0+1}}{\gamma^{n_0+1}}}\,.\gamma > \sqrt[n]{a_n}.$$

Protože $\lim \sqrt[n]{\frac{a_{n_0+1}}{\gamma^{n_0+1}}} = 1$, dostaneme limitním přechodem pro vhodně zvolenou posloupnost (k_n)

$$\gamma \ge \lim \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = \limsup \sqrt[n]{a_n} \qquad - \text{a to je spor s 3.18.}$$

□

Poznámka. Až bude definována funkce logaritmus a až si dokážeme, že za jistých předpokladů

$$a = \lim a_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln a = \lim \ln a_n,$$

snadno odvodíme Cauchyův vzorec ze Stolzovy věty, protože

$$\lim \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{\ln a_n}{n} = \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Příklad 3.5.13. Pomocí Cauchyova vzorce odvodíme snadno již známé limity:

$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{a}{a} = 1$ pro $a > 0$,

$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$,

$\lim \sqrt[n]{n!} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty$.

3.6 Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence

Definice 3.6.1. Číselná posloupnost (a_n) se nazývá cauchyovská, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)(|a_m - a_n| < \varepsilon). \tag{3.19}$$

Pro cauchyovskou posloupnost se někdy používá termín fundamentální posloupnost. Podmínku 3.19 lze ekvivalentně formulovat takto:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon). \tag{3.20}$$

Následující věta ukazuje, že splnění nebo nesplnění 3.19 rozhoduje o konvergenci reálné i komplexní posloupnosti. Proto se též nazývá **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence**. Podmínku 3.19, resp. 3.20 zkráceně označujeme B.-C. podmínka.

Věta 3.6.2. *Číselná posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že posloupnost (a_n) má konečnou limitu a. Zapsáno symbolicky

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \delta).$$

Pro $m, n > n_0$ tedy platí

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\delta.$$

Proto pro libovolné kladné ε položíme $\delta = \varepsilon/2$ a najdeme n_0. Pak pro $n, m > n_0$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon$, tj. platí B.-C. podmínka.

($\Leftarrow$) Nechť posloupnost (a_n) splňuje B.-C. podmínku. Nejdříve ukážeme, že posloupnost (a_n) je omezená. Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak podle 3.19 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall n > n_0)(|a_n - a_{n_0+1}| < 1) \quad \Longrightarrow \quad (\forall n > n_0)(|a_n| < 1 + |a_{n_0+1}|) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})\left(|a_n| \leq \max\{1 + |a_{n_0+1}|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}\right).$$

Proto je posloupnost (a_n) omezená.

Pro tuto chvíli se zabývejme reálnou posloupností (a_n). Její omezenost implikuje, že limes superior je konečné, označme jej $a = \limsup a_n$. Z definice limes superior je $a = \lim a_{k_n}$ pro nějakou vybranou posloupnost (a_{k_n}). Zapsáno v symbolech:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1)(\forall n > n_1)(|a_{k_n} - a| < \varepsilon). \tag{3.21}$$

Jelikož (k_n) je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, je $k_n \geq n$. Proto pro $n > n_0$ je také $k_n > n_0$. Odhadujme (při $n > n_0, n_1$):

$$|a_n - a| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \varepsilon + \varepsilon.$$

Tedy pro libovolné kladné δ stačí zvolit $\varepsilon = \delta/2$ a použít 3.19 a 3.21 pro nalezní $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Celkově platí

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|a_n - a| < \delta).$$

To už znamená, že číslo a je limitou reálné posloupnosti (a_n).

Uvažujme nyní komplexní posloupnost (a_n), která splňuje B.-C. podmínku. Protože pro každé komplexní číslo z platí

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z|\,,$$

splňují B.-C. podmínku i reálné posloupnosti $(\operatorname{Re} a_n)$ a $(\operatorname{Im} a_n)$. Tedy podle už dokázaného posloupnosti $(\operatorname{Re} a_n)$ a $(\operatorname{Im} a_n)$ jsou konvergentní. Věta 3.2.15 implikuje, že komplexní posloupnost je také konvergentní. □

Příklad 3.6.3. Dokažme konvergenci posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{2^k}.$$

Odhadujme

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin(k!)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{2^k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(k!)}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin(k!)|}{2^k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon\,.$$

Pro libovolné kladné ε stačí vzít $n_0 = 1/\varepsilon$. Pak pro $n > n_0$ a libovolné $p \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Posloupnost (a_n) má tedy konečnou limitu, kterou však neumíme určit.

Bolzanovo-Cauchyovo kritérium může sloužit i k důkazu divergence posloupnosti.

Příklad 3.6.4. Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daná předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

je na první pohled ostře rostoucí, a tedy má limitu $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ukážeme, že tato posloupnost splňuje negaci B.-C. podmínky

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\exists p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon), \tag{3.22}$$

což už bude znamenat, že její limita je $+\infty$, jak jsme to už odvodili jinou metodou v příkladu 3.2.14. Využijeme odhadu

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\ .$$

Abychom ověřili 3.22, stačí vzít $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a pro zadané n_0 pak uvažovat libovolné $n > n_0$ a $p = n$.

3.7 Obecná mocnina a logaritmus

Cílem této kapitoly bude definovat obecnou mocninu a^α pro každé kladné reálné a a každé reálné α a posléze logaritmus kladného čísla b při kladném základě $a \neq 1$. Připomeneme nejdříve definici a^α pro racionální exponenty α a vlastnosti mocniny z ní plynoucí. Po definici obecné mocniny budeme požadovat, aby rovněž tyto vlastnosti zachovala.

I. Definice celočíselné mocniny

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}, a > 0$, klademe

$$a^n := \underbrace{a.a \ldots a}_{\text{n krát}}\ , \qquad a^0 := 1\ , \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n}\ .$$

Celočíselnou mocninu lze takto definovat v každém komutativním tělese, protože se používá pouze násobení a existence inverzního prvku.

Pro definici racionální mocniny v $\mathbb{R}$ už byly zapotřebí Axiomy uspořádání i Axiom úplnosti. Z nich jsme odvodili větu 2.1.10, která k danému kladnému a zaručovala existenci jediného čísla b takového, že $b^n = a$.
Toto b jsme nazvali n-tou odmocninou čísla a a označili $b = \sqrt[n]{a}$ nebo $b = a^{\frac{1}{n}}$.

II. Definice racionální mocniny

Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}, a > 0$, definujeme

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ .$$

Lze dokázat, že $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Proto pro ekvivalentní definici racionální mocniny můžeme zvolit i tvar $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.
Aby definice byla korektní, musí se ukázat, že když $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pak $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Takto definovaná racionální mocnina má následující vlastnosti, jejichž důkaz je přenechán čtenáři.

Vlastnosti racionální mocniny:
Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, a každé $r, s \in \mathbb{Q}$ platí

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$, $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(2) $(ab)^r = a^r b^r$, $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(4) Pro $r < s$ platí: $\quad 1 < a \quad \Rightarrow \quad a^r < a^s$,
$\quad 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad a^r > a^s$.

(5) Pro $0 < a < b$ platí: $\quad 0 < r \quad \Rightarrow \quad a^r < b^r$,
$\quad r < 0 \quad \Rightarrow \quad a^r > b^r$.

Přistupme k definci obecné mocniny. K této definici použijeme pojmu limita.

III. Definice obecné mocniny

Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Klademe

$$a^\alpha := \lim a^{r_n}, \quad \text{kde } (r_n) \text{ je racionální posloupnost a } \lim r_n = \alpha.$$

Aby definice byla **korektní**, musíme ověřit tyto vlastnosti:

A. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje racionální posloupnost (r_n) taková, že $\lim r_n = \alpha$.
B. Pro každou racionální konvergentní posloupnost (r_n) existuje $\lim a^{r_n}$.
C. Hodnota $\lim a^{r_n}$ závisí pouze na α a a, ne na samotné posloupnosti (r_n).
D. Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ se definice obecné mocniny $a^\alpha = \lim a^{r_n}$ shoduje s definicí mocniny a^α pro racionální exponent.

A. Ukážeme, že k libovolnému $\alpha \in \mathbb{R}$ dokonce existuje ostře rostoucí racionální posloupnost (r_n), která má za limitu α.
Použijeme netriviální vlastnosti reálných čísel 2.1.9, že mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo.

Za r_1 zvolíme libovolné $r_1 \in \mathbb{Q}$ takové, že $\alpha - \frac{1}{2} < r_1 < \alpha$. Máme-li už nalezeno $r_n < \alpha$, vezmeme $r_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tak, aby leželo mezi číslem α a aritmetickým průměrem čísel r_n a α, tedy
$$r_n < \frac{r_n + \alpha}{2} < r_{n+1} < \alpha.$$

Posloupnost (r_n) je proto ostře rostoucí. Pro vzdálenost r_{n+1} od α platí $\alpha - r_{n+1} < \alpha - \frac{r_n+\alpha}{2} = \frac{\alpha - r_n}{2}$, tj. vzdálenost každého členu posloupnosti (r_n) od čísla α je nejméně o polovinu menší než vzdálenost předchozího členu. Z toho už plyne, že

$$0 < \alpha - r_n < \frac{1}{2^n} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim r_n = \alpha.$$

Poznamenejme, že kdybychom se spokojili s nemonotonní racionální posloupností, stačilo by vzít $(r_n) = \left(\frac{[n\alpha]}{n}\right)$. Protože pro celou část $[x]$ reálného čísla platí $x - 1 < [x] \leq x$, lze posloupnost r_n snadno sevřít a pro výpočet limity použít "sendvičovou" větu:

$$\alpha \leftarrow \frac{n\alpha - 1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leq \frac{n\alpha}{n} = \alpha.$$

Než přejdeme k bodu **B** dokážeme pomocné tvrzení.

Lemma 3.7.1. *Nechť* (r_n) *je posloupnost racionálních čísel taková, že* $\lim r_n = 0$ *a dále nechť* a *je libovolné kladné reálné číslo. Pak* $\lim a^{r_n} = 1$.

Důkaz. Pro $a = 1$ tvrzení triviálně platí, proto v dalším předpokládame $a \neq 1$. Protože $\lim r_n = 0$, lze bez újmy na obecnosti předpokládat $|r_n| < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

1) Nejdříve uvažujme situaci, kde $r_n > 0$ pro každé n.
Definujme posloupnost přirozených čísel (k_n) předpisem $k_n = \left[\frac{1}{r_n}\right]$. Pro tuto posloupnost platí $\lim k_n = +\infty$, jelikož

$$+\infty \ \leftarrow \ \frac{1}{r_n} - 1 < \left[\frac{1}{r_n}\right] = k_n \leq \frac{1}{r_n} \ \ \rightarrow \ +\infty.$$

Posloupnost $(a^{\frac{1}{k_n}})$ je tedy skorovybraná z posloupnosti $(a^{\frac{1}{n}})$, proto $\lim a^{\frac{1}{k_n}} = \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Dále pro kladné r_n máme

$$0 < r_n = \frac{1}{\frac{1}{r_n}} \leq \frac{1}{[\frac{1}{r_n}]} = \frac{1}{k_n}.$$

Z vlastnosti (4) racionální mocniny dostaneme

$$1 = a^0 < a^{r_n} \leq a^{\frac{1}{k_n}} \quad \text{pro } a > 1,$$

$$1 = a^0 > a^{r_n} \geq a^{\frac{1}{k_n}} \quad \text{pro } 0 < a < 1.$$

V obou případech věta o limitě sevřené posloupnosti dává $\lim a^{r_n} = 1$.

2) V případě, že $r_n < 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, použijme výsledku z 1) na kladnou posloup-

nost $(-r_n)$. Dostaneme

$$\lim a^{r_n} = \lim \frac{1}{a^{-r_n}} = \frac{1}{\lim a^{-r_n}} = 1.$$

3) Uvažujme obecnou racionální posloupnost (r_n) s nulovou limitou. Pokud pro nekonečně mnoho indexů n je $r_n > 0$, vybereme posloupnost (r_{h_n}) tak, aby ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (h_n) pokryla všechny indexy n takové, že $r_n > 0$.

Pokud je $r_n < 0$ pro nekonečně mnoho indexů n, vybereme posloupnost (r_{l_n}) tak, aby ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (l_n) pokryla všechny indexy n takové, že $r_n < 0$.

Pokud je $r_n = 0$ pro nekonečně mnoho indexů n, vybereme analogicky posloupnost (r_{s_n}).

Dostaneme takto minimálně jednu, maximálně tři vybrané posloupnosti, každá z nich má limitu 1 a jejich indexy pokrývají až na konečný počet výjimek všechna přirozená čísla. To podle důsledku 3.5.9 znamená, že i limita původní posloupnosti existuje a je rovna 1. □

B. + C. Nechť (r_n) je ostře rostoucí konvergentní posloupnost racionálních čísel, $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Zvolme libovolné $r \in \mathbb{Q}$, $r > \lim r_n$. Z vlastnosti (4) racionálních mocnin dostaneme

$$\text{pro} \quad a \geq 1: \qquad a^{r_1} \leq a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}} \leq a^r \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{pro } 0 < a < 1: \qquad a^{r_1} \geq a^{r_n} > a^{r_{n+1}} > a^r \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

V obou případech je posloupnost (a^{r_n}) monotonní a omezená, proto má (a^{r_n}) limitu v $\mathbb{R}$. Nechť (s_n) je libovolná posloupnost racionálních čísel, $\lim s_n = \alpha$. Označme (r_n) ostře rostoucí posloupnost z bodu **A**, která má rovněž za limitu α. Protože $\lim(s_n - r_n) = 0$, můžeme použít dokázané lemma. Dostaneme

$$a^{s_n} = a^{s_n - r_n} a^{r_n} \mapsto 1. \lim a^{r_n} = \lim a^{r_n} \in \mathbb{R}.$$

Tedy existuje reálná limita $l = \lim a^{s_n}$ pro libovolnou racionální posloupnost (s_n) mající limitu α. Přitom limita l je stejná pro všechny takové posloupnosti (s_n).

D. V případě, že $\alpha \in \mathbb{Q}$, můžeme zvolit za (s_n) konstantní posloupnost $s_n = \alpha$. Pak $(a^{s_n}) = (a^\alpha)$ je také konstantní posloupnost a zřejmě $\lim a^{s_n} = a^\alpha$.

Vlastnosti obecné mocniny

Naše definice obecné mocniny a^α je tedy korektní. Navíc obecná mocnina má všech pět vlastností, které jsme vyjmenovali pro racionální mocninu. V tomto okamžiku dokážeme platnost jenom dvou, a to (1) a (4). Důkaz (2) a (5) je malou modifikací důkazu (1) a (4), je proto přenechán čtenáři; důkaz (3) provedeme později.

(1) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ pro každé $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Důkaz. Nechť (r_n) a (s_n) jsou racionální posloupnosti s limitami α, resp. β. Z vlastnosti (1) racionálních mocnin platí $a^{r_n+s_n} = a^{r_n} a^{s_n}$. Z věty o limitě součinu dvou posloupností a z definice obecné mocniny dostaneme

$$a^{\alpha+\beta} = \lim a^{r_n+s_n} = \lim a^{r_n} a^{s_n} = \lim a^{r_n} . \lim a^{s_n} = a^\alpha a^\beta.$$

□

(4) Pro každé $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}, a > 0$ platí

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \text{ a } a > 1 \quad &\Longrightarrow \quad a^\alpha < a^\beta, \\ \alpha < \beta \text{ a } a < 1 \quad &\Longrightarrow \quad a^\alpha > a^\beta. \end{aligned}$$

Důkaz. Zvolme dvě racionální čísla $r, s \in \mathbb{Q}$ tak, aby $\alpha < r < s < \beta$. Nechť racionální posloupnosti (r_n) a (s_n) mají limity α, resp. β. Z definice limity plyne, že existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $r_n < r$ a $s_n > s$. Pak z vlastnosti (4) racionálních mocnin plyne pro $a > 1$

$$a^{r_n} < a^r < a^s < a^{s_n} \ . \tag{3.23}$$

Provedeme-li limitní přechod pro $n \mapsto +\infty$, dostaneme z věty 3.3.6 o nerovnostech mezi limitami

$$a^\alpha = \lim a^{r_n} \le a^r < a^s \le \lim a^{s_n} = a^\beta. \tag{3.24}$$

To dokazuje vlastnost (4) pro $a > 1$. Pro $a < 1$ stačí v 3.23 a 3.24 otočit směr nerovností.

□

Právě vlastnost (4), tzv. monotonie reálné mocniny, sehraje důležitou roli v definici logaritmu.

Věta 3.7.2. *Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ a nechť $b \in \mathbb{R}, b > 0$. Pak existuje jediné α takové, že $a^\alpha = b$.*

Důkaz. Provedeme důkaz pouze pro $0 < a < 1$. Důkaz pro $a > 1$ je analogický.
Pro $0 < a < 1$ uvažujme množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \le b\}.$$

Ověříme, že má tyto vlastnosti:

- Množina M je neprázdná.
  Protože $\lim a^n = 0 < b$, od jistého n_0 je každé $n \in \mathbb{N}$ prvkem množiny M.

- Každé reálné číslo y větší než nějaké $x \in M$ také patří do množiny M.
  Nechť $x \in M$ a $x < y$. Z monotonie mocniny plyne $b \geq a^x > a^y \quad \Rightarrow \quad y \in M$.

- Existuje reálné číslo, které nepatří do M.
  Protože $\lim a^{-n} = +\infty$, je od jistého n_1 počínaje $a^{-n} > b$, tj. $-n \notin M$.

Vyjmenované vlastnosti vynucují, že množina M je interval zdola omezený a shora neomezený. Označme $\alpha = \inf M$, tj. α je levý krajní bod intervalu M. Sporem ukážeme, že pro α platí $a^\alpha = b$.
Kdyby $a^\alpha < b$, pak $1 < \frac{b}{a^\alpha}$. Jelikož $\lim a^{-\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$, existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a^{-\frac{1}{n}} < \frac{b}{a^\alpha}$, tedy $a^{\alpha - \frac{1}{n}} < b$, což implikuje, že $\alpha - \frac{1}{n} \in M$, tedy M obsahuje prvek menší než $\inf M$ - spor.
Kdyby $a^\alpha > b$, pak $1 > \frac{b}{a^\alpha}$. Teď využijeme toho, že $\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$. Pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{a} > \frac{b}{a^\alpha}$, neboli $a^{\alpha + \frac{1}{n}} > b$. To však znamená, že $\alpha + \frac{1}{n} \notin M$, přičemž M je shora neomezený interval s levým krajním bodem α - spor.

Jednoznačnost nalezeného α je nasnadě. Protože $\alpha_1 < \alpha_2$ implikuje $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, nemohou být obě tyto mocniny rovny číslu b. □

Definice 3.7.3. Číslo α z předchozí věty 3.7.2 nazýváme **logaritmem čísla** b **při základu** a a značíme $\alpha = \log_a b$.

Je-li základem logaritmu Eulerovo číslo e, mluvíme o **přirozeném logaritmu** a místo $\alpha = \log_e b$ píšeme $\alpha = \ln b$.

Poznámky k logaritmu: Číslo $\log_a b$ je tedy definováno pro $b > 0$ a pro základ $a > 0, a \neq 1$. Z definice plyne $a^{\log_a b} = b$. Lze ukázat, že námi právě definovaná funkce $x \mapsto \log_a x$ má vlastnosti, které očekáváme. Např.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Označíme-li $\gamma = \log_a(x.y)$, $\alpha = \log_a x$ a $\beta = \log_a y$, máme dokázat, že $\gamma = \alpha + \beta$. Z definice dostaneme $a^\gamma = x.y = a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. Monotonie mocniny vynucuje, aby z rovnosti $a^\gamma = a^{\alpha+\beta}$ už plynulo $\gamma = \alpha + \beta$.

Další známé pravidlo

$$\log_a(x^y) = y \log_a x$$

dokážeme obdobně. Označíme $\alpha = \log_a(x^y)$ a $\beta = \log_a x$. Z definice dostaneme $a^\alpha = x^y$ a $a^\beta = x$. Umocněním poslední rovnosti na y dostaneme

$$a^\alpha = x^y = \left(a^\beta\right)^y \stackrel{?}{=} a^{\beta y} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = y\beta,$$

což jsme chtěli dokázat. Otazník nad rovnítkem v posledním řádku naznačuje, že jsme použili zatím nedokázanou vlastnost reálné mocniny. Teď to napravíme.

(3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ pro každé $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Důkaz. Platnost tvrzení, když $\alpha = 0$, $\beta = 0$ nebo $a = 1$, je zřejmá. Proto předpokládejme, že $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, a \neq 1$. Dokonce se omezíme na $a > 1$; pro $a < 1$ je důkaz obdobný.

Vezměme tři racionální posloupnosti (r_n), $(\tilde{r}_n)$ a (s_n) takové, že $\lim r_n = \lim \tilde{r}_n = \alpha$, $\lim s_n = \beta$. Navíc požadujeme, aby (r_n) byla ostře rostoucí a $(\tilde{r}_n)$ ostře klesající. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$r_n < \alpha < \tilde{r}_n \ .$$

Z vlastnosti (4) obecné mocniny dostaneme

$$a^{r_n} < a^\alpha < a^{\tilde{r}_n}.$$

Protože $\beta \neq 0$, od jistého indexu n_1 počínaje mají všechny členy posloupnosti s_n stejné znaménko jako β, tj. jsou všechny kladné nebo všechny záporné. Z vlastnosti (5) obecné mocniny pro každé $n > n_1$ je buď

$$(a^{r_n})^{s_n} < (a^\alpha)^{s_n} < \left(a^{\tilde{r}_n}\right)^{s_n}$$

nebo platí obrácené nerovnosti, o čemž rozhoduje znaménko β. Užitím vlastnosti racionální mocniny přejdeme k nerovnostem

$$a^{r_n s_n} < (a^\alpha)^{s_n} < a^{\tilde{r}_n s_n}.$$

Protože $\lim r_n s_n = \lim \tilde{r}_n s_n = \alpha\beta$, dostaneme z definice obecné mocniny a z věty o limitě sevřené posloupnosti

$$a^{\alpha\beta} = \lim\,(a^\alpha)^{s_n} = (a^\alpha)^\beta \,.$$

□

Zmíníme ještě jednu vlastnost logaritmu, která umožňuje převod mezi funkcemi $\log_a x$ a $\ln x$. Využijeme toho, že $e^{\ln a} = a$ pro každé kladné a.

Označme $\alpha = \log_a x$. Pak $x = a^\alpha = \left(e^{\ln a}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln a}$. To implikuje, že $\ln x = \alpha \ln a = \log_a x \ . \ \ln a$, nebo ekvivalentně

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a}\, \ln x.$$

Tedy funkci $\log_a x$ získáme z přirozeného logaritmu $\ln x$ násobením konstantou $\frac{1}{\ln a}$. To je i důvod, proč další věty vyslovíme pouze pro mocniny se základem e a pro přirozený logaritmus.

Věta 3.7.4. *Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí*

(1) $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim e^{a_n} = e^a$,

(2) $\lim a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim e^{a_n} = +\infty$,

(3) $\lim a_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim e^{a_n} = 0$.

Důkaz. (1) Je-li (a_n) racionální posloupnost s limitou a, je $\lim e^{a_n} = e^a$ přímo z definice e^a. Tvrzení však chceme dokázat pro libovolnou (a_n) s limitou a.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme nějaké racionální r_n tak, aby $a_n - \frac{1}{n} < r_n < a_n$. Takto zkonstruovaná racionální posloupnost (r_n) má rovněž limitu a. Z monotonie obecné mocniny dostaneme

$$e^{r_n} < e^{a_n} < e^{r_n + \frac{1}{n}}.$$

Z definice obecné mocniny plyne $\lim e^{r_n} = e^a = \lim e^{r_n + \frac{1}{n}}$. Věta o limitě sevřené posloupnosti pak dává $\lim e^{a_n} = e^a$.

(2) Nechť $\lim a_n = +\infty$. Pak z monotonie mocniny

$$e^{[a_n]} \le e^{a_n} .$$

Jelikož posloupnost $e^{[a_n]}$ je skorovybraná z posloupnosti e^n, která má limitu $+\infty$, je i $\lim e^{[a_n]} = +\infty$. Věta o sevřené posloupnosti už implikuje platnost (2).

(3) Nechť $\lim a_n = -\infty$. Jelikož $e^{a_n} = \frac{1}{e^{-a_n}}$ a $\lim(-a_n) = +\infty$, podle bodu (2) je $\lim e^{a_n} = \frac{1}{+\infty} = 0$. □

Předchozí věta umožňuje následující definici.

Definice 3.7.5. Klademe $\quad e^{+\infty} = +\infty \quad$ a $\quad e^{-\infty} = 0$.

Věta 3.7.6. *Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel. Pak platí*

(1) $\lim a_n = a \in (0, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \lim \ln a_n = \ln a$,

(2) $\lim a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim \ln a_n = +\infty$,

(3) $\lim a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim \ln a_n = -\infty$.

Důkaz. (1) Provedeme sporem. Nechť $\lim a_n = a$ a přitom nechť neplatí $\lim \ln a_n = \ln a$. To znamená, že buď $\limsup \ln a_n$ nebo $\liminf \ln a_n$ není rovno $\ln a$. Tedy existuje $b \ne \ln a$

a vybraná posloupnost $(\ln a_{k_n})$ taková, že $\lim \ln a_{k_n} = b$. Z předchozí věty dostaneme $\lim e^{\ln a_{k_n}} = \lim a_{k_n} = e^b = a$. To je ekvivalentní s tím, že $b = \ln a$ - spor.
Důkazy (2) a (3) jsou obdobné. $\square$

Výpočet limity posloupnosti tvaru $\left(a_n^{b_n}\right)$

Je daná kladná posloupnost (a_n) a reálná posloupnost (b_n), přičemž $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$. Pro výpočet $\lim a_n^{b_n}$ lze použít obě předchozí věty:

$$\lim a_n^{b_n} = \lim e^{b_n \ln a_n} = e^{\lim(b_n \ln a_n)} = e^{\lim b_n . \lim \ln a_n},$$

pokud součin v exponentu je definován.

Tento součin je definován například, když $b \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}, a > 0$. V tomto případě je $e^{\lim b_n . \lim \ln a_n} = e^{b \ln a} = a^b$. Tedy

$$\lim a_n^{b_n} = a^b.$$

Toto pravidlo zůstává v platnosti i v dalších případech, když u mocniny připustíme v exponentu, resp. v základu nekonečnou hodnotu a vhodně rozšíříme operaci mocnění na $\overline{\mathbb{R}}$. Proto klademe

Definice 3.7.7.

$$\begin{array}{rclll}
a^{+\infty} & = & +\infty & \text{pro} & 1 < a \leq +\infty, \\
a^{+\infty} & = & 0 & \text{pro} & 0 < a < 1, \\
a^{-\infty} & = & 0 & \text{pro} & 1 < a \leq +\infty, \\
a^{-\infty} & = & +\infty & \text{pro} & 0 < a < 1, \\
(+\infty)^{\alpha} & = & +\infty & \text{pro} & 0 < \alpha \leq +\infty, \\
(+\infty)^{\alpha} & = & 0 & \text{pro} & -\infty \leq \alpha < 0.
\end{array}$$

Pro výpočet $\lim(b_n \ln a_n)$ nelze použít větu o součinu limit v případě, kdy $\lim b_n = 0$ a $\lim \ln a_n = \pm\infty$, ani v případě, kdy $\lim b_n = \pm\infty$ a $\lim \ln a_n = 0$. Proto se **nedefinují** výrazy:

$$+\infty^0 , \qquad 0^0 , \qquad 1^{\pm\infty} .$$

Věta 3.7.8. *Nechť (α_n) je reálná posloupnost taková, že $\lim |\alpha_n| = +\infty$. Pak*

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e.$$

Důkaz. Připomeneme, že ze způsobu definování čísla e víme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \quad e \quad \longleftarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

1) Nejdříve uvažujme posloupnosti (α_n) takové, že $\lim \alpha_n = +\infty$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha_n > 1$ pro všechna n. Pro sevření posloupnosti využijeme monotonie mocniny.

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]+1}\right)^{[\alpha_n]} < \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} < \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]}\right)^{[\alpha_n]+1} =: d_n \ .$$

Posloupnost (d_n) napravo je skorovybraná z posloupnosti (b_n), protože $([\alpha_n])$ je posloupnost přirozených čísel s limitou $+\infty$. Tedy $\lim d_n = \lim b_n = e$.
Posloupnost (c_n) snadno upravíme na součin posloupnosti skorovybrané z (a_n) a posloupnosti, která má limitu 1 takto:

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]+1}\right)^{[\alpha_n]+1} \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]+1}\right)^{-1} .$$

Tedy $\lim c_n = e$. Z věty o limitě sevřené posloupnosti máme tvrzení věty.

2) Uvažujme teď posloupnost (α_n) s limitou $-\infty$. Upravujme

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1}\right)^{-\alpha_n} = \left(1 + \frac{1}{-\alpha_n - 1}\right)^{-\alpha_n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{-\alpha_n - 1}\right)^{-\alpha_n - 1} . \left(1 + \frac{1}{-\alpha_n - 1}\right) .$$

Protože posloupnost $(-\alpha_n - 1)$ má limitu $+\infty$, plyne z bodu 1), že výsledná limita je e, což dokazuje tvrzení věty i v tomto případě.

3) Zbývá diskutovat situaci, kdy $\lim \alpha_n$ neexistuje. Protože ale $\lim |\alpha_n| = +\infty$, znamená to, že posloupnost (α_{k_n}) tvořená kladnými členy původní posloupnosti má limitu $+\infty$ a posloupnost (α_{h_n}) tvořena nekladnými členy původní posloupnosti má limitu $-\infty$. Indexy těchto dvou posloupností pokrývají všechna přirozená čísla. Proto bod 1) a 2) a důsledek 3.5.9 už implikují platnost dokazovaného tvrzení. □

3.8 Dodatek

Číselné soustavy se základem β

Pojem limita nám umožní korektně definovat zápis čísla v soustavě s libovolným reálným základem větším než 1.

Věta 3.8.1. *Nechť $\beta, x \in \mathbb{R}, \beta > 1$ a $x > 0$. Označme k celé číslo takové, že $\beta^k \le x < \beta^{k+1}$. Pak existují jednoznačně daná celá nezáporná čísla $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots$ taková, že pro* *každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$0 < x - \big(x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + x_{k-n}\beta^{k-n}\big) < \beta^{k-n}. \tag{3.25}$$

Důkaz. Nejdříve dokažme sporem jednoznačnost. Nechť existují dvě různé posloupnosti $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots$ a $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots$ požadované vlastnosti. Označme i minimální index takový, že $x_{k-i} \neq y_{k-i}$. Jelikož vztah 3.25 splňují obě posloupnosti, musí platit

$$-\beta^{k-i} < \Big(x - \big(x_k\beta^k + \cdots + x_{k-i}\beta^{k-i}\big)\Big) - \Big(x - \big(y_k\beta^k + \cdots + y_{k-i}\beta^{k-i}\big)\Big) < \beta^{k-i}$$

a po úpravě

$$-\beta^{k-i} < \big(x_{k-i} - y_{k-i}\big)\beta^{k-i} < \beta^{k-i}.$$

Protože $|x_{k-i} - y_{k-i}| \geq 1$, nemůže být poslední nerovnost splněna.

Existenci čísel $x_k, x_{k-1}, x_{k-2} \ldots$ dokážeme konstruktivně, tj. popíšeme algoritmus, jak tato čísla počítat. Položme

$$x_k := \left[\frac{x}{\beta^k}\right] \quad \text{a} \quad r_k := \frac{x}{\beta^k} - x_k.$$

Pro každý další celočíselný index $i \leq k$ pokládáme rekurentně

$$x_{i-1} := [\beta r_i] \quad \text{a} \quad r_{i-1} := \beta r_i - x_{i-1}.$$

Dokážeme, že takto získaná čísla splňují podmínku 3.25.

Indukcí na i ukážeme, že posloupnosti $x_k, x_{k-1}, \ldots$ a $r_k, r_{k-1}, \ldots$ byly konstruované tak, aby pro každé i platilo

$$x = x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \ldots + x_{k-i}\beta^{k-i} + r_{k-i}\beta^{k-i}, \quad \text{kde} \quad r_{k-i} \in [0,1)\ . \tag{3.26}$$

Z konstrukce pro $i = 0$ plyne, že

$$r_k = \frac{x}{\beta^k} - x_k = \frac{x}{\beta^k} - \left[\frac{x}{\beta^k}\right],$$

a proto

$$r_k \in [0,1), \qquad x = x_k\beta^k + r_k\beta^k.$$

Že $r_{k-i} \in [0,1)$, plyne přímo z definice r_{k-i}. Z indukčního předpokladu víme, že

$$x = x_k\beta^k + \ldots + x_{k-i}\beta^{k-i} + r_{k-i}\beta^{k-i},$$

a tedy

$$r_{k-i} = x\beta^{i-k} - \big(x_k\beta^k + \ldots x_{k-i}\beta^{k-i}\big)\beta^{i-k}.$$

Z definice zase platí

$$x_{k-(i+1)} = x_{k-i-1} = [\beta r_{k-i}] \quad \text{a} \quad r_{k-(i+1)} = r_{k-i-1} = \beta r_{k-i} - x_{k-i-1}.$$

Dostaneme

$$r_{k-i} = \big(r_{k-i-1} + x_{k-i-1}\big)\beta^{-1}.$$

Porovnáním obou vyjádření r_{k-i} získáme

$$x\beta^{i-k} - \big(x_k\beta^k + \ldots + x_{k-i}\beta^{k-i}\big)\beta^{i-k} = (r_{k-i-1} + x_{k-i-i})\beta^{-1}$$

a z toho

$$x = x_k\beta^k + \ldots + x_{k-i}\beta^{k-i} + x_{k-i-1}\beta^{k-i-1} + r_{k-i-1}\beta^{k-i-1},$$

jak jsme měli dokázat.
Z tvaru x podle 3.26 už plyne vlastnost 3.25. $\square$

Důsledek 3.8.2. *K číslům $\beta, x \in \mathbb{R}$, $\beta > 1, x > 0$ uvažujme posloupnost nezáporných celých čísel $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots$, jejíž existenci zaručuje předchozí věta. Pak*

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \ldots + x_{k-n}\beta^{k-n}). \tag{3.27}$$

Definice 3.8.3. Vyjádření čísla $x \geq 0$ jako limity 3.27 nazýváme rozvojem čísla x v soustavě se základem β nebo zkráceně β-rozvojem čísla x. Koeficient x_i u mocniny β^i nazýváme i-tá cifra β-rozvoje čísla x. Rozvoj čísla x v soustavě se základem β zapisujeme

$$x = x_k x_{k-1}\ldots x_0 \bullet_\beta x_{-1}x_{-2}\ldots \quad \text{pro} \quad k \geq 0$$

a

$$x = 0 \bullet_\beta \underbrace{0\ldots0}_{-k-1} x_k x_{k-1}\ldots \quad \text{pro} \quad k < 0.$$

Vlastnosti β-rozvoje

1. Každá cifra x_i v β-rozvoji je celé číslo splňující $0 \leq x_i < \beta$.
   Plyne to z toho, že $r_{i+1} \in [0, 1)$, což implikuje $0 \leq \beta r_{i+1} < \beta$. Tedy celá část $[\beta r_{i+1}] =: x_i$ patří do intervalu $\langle 0, \beta)$.

2. Číslo x, pro které jsou všechny cifry od jistého indexu počínaje nulové, tj. $x_i = 0$ pro každé $i \leq i_0$, nazýváme číslo s konečným β-rozvojem. Každé reálné kladné x lze vyjádřit jako limitu posloupnosti čísel s konečným β-rozvojem.

3. Je-li $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$, pak nekonečně mnoho cifer x_i v β-rozvoji čísla x je menších nebo rovných $\beta - 2$.
   Pro důkaz sporem předpokládejme, že pouze konečný počet cifer je $\leq \beta - 2$. Označme j nejmenší index takových cifer. Pak
   $$x = x_k\beta^k + \ldots + x_j\beta^j + (\beta - 1) \lim_{n\to\infty} \left(\beta^{j-1} + \beta^{j-2} + \ldots + \beta^{j-n}\right)$$
   a současně
   $$x = x_k\beta^k + \ldots + x_j\beta^j + r_j\beta^j \ , \quad \text{kde} \quad r_j \in [0,1).$$
   Musí tedy platit
   $$r_j\beta^j = \lim_{n\to\infty} \beta^{j-1} + \beta^{j-2} + \ldots + \beta^{j-n} = \beta^j.$$
   To by znamenalo, že $r_j = 1$ - spor.

4. Pro $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$, odpovídá libovolná posloupnost cifer splňující vlastnosti 1) a 2) rozvoji nějakého reálného čísla x.

Poznámka. Algoritmus pro hledání cifer v β-rozvoji z důkazu věty se nazývá hladový algoritmus. Tento algoritmus nám např. dává

$$\pi = 3 \bullet_{10} 14159\ldots = 11 \bullet_2 00100011110\ldots$$

Při základu $\beta = 10$ v zápisu vynecháváme index 10 u desetinné tečky.

Poznámka. Množina čísel x, pro která má β-rozvoj čísla $|x|$ za znakem $\bullet_\beta$ doprava pouze cifry 0, nazýváme β-celá čísla a značíme $\mathbb{Z}_\beta$. Zřejmě pro $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$, je $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$. Pro neceločíselné β je situace daleko zajímavější. Např. pro základ $\beta = \sqrt{2} + 1$ má množina $\mathbb{Z}_\beta$ mezi sousedy dva typy mezer, jednu délky 1 a druhou délky $\sqrt{2} - 1$. Pro $\beta = \frac{3}{2}$ je mezer mezi sousedy v $\mathbb{Z}_\beta$ dokonce nekonečně mnoho.

Kapitola 4

Reálné funkce reálné proměnné

4.1 Základní definice

Až dosud jsme se zabývali většinou reálnými posloupnostmi, tedy zobrazeními s definičním oborem $\mathbb{N}$. Nyní obrátíme svou pozornost na širší třídu zobrazení.

Definice 4.1.1. Zobrazení f, jehož definiční obor D_f i obor hodnot H_f je podmnožinou množiny reálných čísel, se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.
Grafem f se rozumí množina $\big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in D_f\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

U "hezkých"funkcí bude možno graf namalovat. Zdaleka ne všechny funkce mají tuto vlastnost. Definujeme dvě takové funkce:

Dirichletova funkce:

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{když} \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0\ , & \text{když} \ \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Riemannova funkce:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}\ , & \text{když} \ \ x = \frac{p}{q}\ , \ \text{kde} \ \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \ \ \text{a} \ \ nsd(p,q) = 1 \\ 0\ , & \text{když} \ \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zato poslední funkce, kterou teď zavedeme, zvaná **signum** (z latinského "znamení"), má velice jednoduchý tvar a načrtnout její graf je snadné. Definujeme

$$sgn(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{když} \ \ x > 0 \\ 0\ , & \text{když} \ \ x = 0 \\ -1\ , & \text{když} \ \ x < 0\ . \end{cases}$$

Zavedeme několik užitečných pojmů:

Definice 4.1.2. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že

- funkce f je **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená,
- funkce f je **rostoucí**, když $(\forall x_1, x_2 \in D_f)\,(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,
- funkce f je **ostře rostoucí**, když $(\forall x_1, x_2 \in D_f)\,(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
- funkce f je **klesající**, když $(\forall x_1, x_2 \in D_f)\,(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,
- funkce f je **ostře klesající**, když $(\forall x_1, x_2 \in D_f)\,(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,
- funkce f je **monotonní**, když je rostoucí nebo klesající,
- funkce f je **ryze monotonní**, když je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Poznámky.

1) Omezenost funkce lze symbolicky zapsat takto: $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq K)$.
Podobně lze zapsat omezenost shora, resp. zdola.

2) Když je funkce f ryze monotonní, pak je f prostá. Proto existuje inverzní funkce f^{-1}, přičemž se zachovává typ monotonie, tj.
f je ostře rostoucí $\Rightarrow$ f^{-1} je ostře rostoucí,
f je ostře klesající $\Rightarrow$ f^{-1} je ostře klesající.

3) Prostá funkce nemusí být ryze monotonní. Příkladem prosté funkce, která není ani klesající ani rostoucí, je $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ s definičním oborem $\mathbb{R} - \{0\}$.

Úmluva: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a $M \subset D_f$. Řekneme, že f má vlastnost V na množině M, když zúžení $f_{/M}$ má vlastnost V.

Příklad 4.1.3. Funkce $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ je ostře klesající na $(0, +\infty)$, protože $f_{/(0,+\infty)}$ je funkce ostře klesající.

Definice 4.1.4. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné, jejiž definiční obor D_f vyhovuje podmínce $(\forall x \in D_f)(-x \in D_f)$. Řekneme, že
- funkce f je **sudá**, když $(\forall x \in D_f)(f(x) = f(-x))$;
- funkce f je **lichá**, když $(\forall x \in D_f)(-f(x) = f(-x))$.

Definice 4.1.5. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné, pro niž existuje kladné $l \in \mathbb{R}$ takové, že

1) $(\forall x \in D_f)(x+l, x-l \in D_f)$;
2) $(\forall x \in D_f)(f(x+l) = f(x))$.

Funkci f říkáme **periodická** a číslu l **perioda** funkce f.

Příklad 4.1.6. Aplikujme zavedené pojmy na výše zmíněné funkce.

1) Funkce signum je lichá, není periodická.

2) Konstantní funkce je vždy sudá. Konstantní funkce je lichá pouze v případě, že $f(x)$ je identicky rovno 0. Konstantní funkce je periodická, její periodou je libovolné kladné reálné l, nejmenší perioda neexistuje.

3) Dirichletova funkce je sudá, navíc je periodická s periodou libovolné racionální kladné l. Ani zde neexistuje nejmenší perioda.

4) Riemannova funkce je sudá a periodická s periodou libovolné přirozené l, nejmenší periodou je tedy číslo 1.

Některé speciální typy funkcí

1. Funkci P danou předpisem
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
kde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou reálné konstanty, nazýváme **polynomem**. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme n **stupeň polynomu** P. Definičním oborem polynomu je $\mathbb{R}$.

2. Funkce tvaru
$$f = \frac{P}{Q},$$
kde P a Q jsou polynomy, se nazývá **racionální** funkce. Definičním oborem racionální funkce je $\mathbb{R} - \{\text{kořeny polynomu ve jmenovateli}\}$.

3. **Mocninná** funkce je daná předpisem $f(x) = x^\alpha$, kde α je reálná konstanta. Definičním oborem mocninné funkce jsou kladná reálná čísla. Jenom pro některé speciální racionální hodnoty α je definiční obor větší, např. funkce $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ má definiční obor celé $\mathbb{R}$.

4. **Exponenciální** funkce definovaná vztahem $x \mapsto a^x$, kde $a > 0, a \neq 1$, má definiční obor $\mathbb{R}$. Z monotonie obecné mocniny plyne, že exponenciální funkce je ryze monotonní. Funkce k ní inverzní je dána předpisem $x \mapsto \log_a x$ a nazývá se **logaritmická** funkce. Definičním oborem logaritmické funkce jsou kladná reálná čísla.

5. Funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg nazýváme **goniometrickými** funkcemi. Jejich definičními obory jsou $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$, $D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ a $D_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} - \{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Tyto funkce jsou periodické, tudíž nejsou prosté.
Zúžení goniometrických funkcí na vhodný interval zaručí ryzí monotonii, a tedy existenci inverzních funkcí. Konkrétně definujeme funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg předpisy:

$$\arcsin x := \sin^{-1}_{/\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle} x, \quad \arccos x := \cos^{-1}_{/\langle 0,\pi\rangle} x \;,$$

$$\operatorname{arctg} x := \operatorname{tg}^{-1}_{/(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} x, \quad \operatorname{arccotg} x := \operatorname{cotg}^{-1}_{/(0,\pi)} x \;.$$

Právě definované čtveřici funkcí se říká **cyklometrické** funkce.

Funkce vzniklé z funkcí (1)-(5) předchozího výčtu konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, skládání a invertování se nazývají **elementární** funkce.

Mezi elementární funkce tedy patří i tzv. **hyperbolické** funkce

hyperbolický sinus	$\sinh x$	$:=$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,
hyperbolický kosinus	$\cosh x$	$:=$	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,
hyperbolický tangens	$\operatorname{tgh} x$	$:=$	$\frac{\sinh x}{\cosh x}$,
hyperbolický kotangens	$\operatorname{cotgh} x$	$:=$	$\frac{\cosh x}{\sinh x}$.

4.2 Limita funkce

Než přistoupíme k definici limity funkce, musíme si vyjasnit, v jakých bodech má smysl uvažovat o limitě funkce.

Definice 4.2.1. Řekneme, že $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je **hromadným bodem** množiny $A \subset \mathbb{R}$, když v každém okolí bodu a leží alespoň jeden prvek množiny A různý od a.
Zapsáno symbolicky

$$(\forall H_a)(H_a \cap A - \{a\} \neq \emptyset).$$

Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A'.

Příklad 4.2.2. Uveďme na několika příkladech, jak může vypadat množina hromadných bodů.
1. $A = \{-2, 0, 4\} \quad \Rightarrow \quad A' = \emptyset$.
2. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.
3. $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \Rightarrow \quad A' = \{0\}$.
4. $J = \langle 0, 1) \quad \Rightarrow \quad J' = \langle 0, 1\rangle$. Tento příklad ukazuje, že hromadný bod množiny A může, ale také nemusí patřit do množiny A.
5. Množina přirozených čísel má jediný hromadný bod, a to $+\infty$, tj. $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$.
6. Množina celých čísel má dva hromadné body, a to $\pm\infty$, tj. $\mathbb{Z}' = \{-\infty, +\infty\}$.
7. Spočetná množina $\mathbb{Q}$ má nespočetnou množinu hromadných bodů, protože $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$.

Definice 4.2.3. Bod $a \in A$ nazveme **izolovaným bodem** množiny A, když a není hromadným bodem množiny A. Symbolicky

$$(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\}).$$

Věta 4.2.4. *Následující tři výroky jsou ekvivalentní:*

1) $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *je hromadným bodem množiny* B.

2) V každém okolí bodu b leží nekonečně mnoho bodů množiny B.

3) Existuje posloupnost (x_n) *taková, že* $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in B - \{b\})$ *a* $\lim x_n = b$.

Důkaz. Dokážeme tři implikace *1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3* $\Rightarrow$ *1*.

1 $\Rightarrow$ *2:* Pro spor předpokládejme, že existuje okolí H_b^* bodu b, které obsahuje pouze konečný počet bodů množiny B. Je-li $H_b^* \cap B - \{b\} = \emptyset$, máme už přímo spor s definicí hromadného bodu. V případě, že $H_b^* \cap B - \{b\} \neq \emptyset$, pak pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ můžeme psát $H_b^* \cap B - \{b\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.
Je-li $b \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \min\{|y_i - b| \; |i = 1, 2, \ldots, k\}$; když $b = \pm\infty$, definujeme $\alpha = \max\{|y_i| + 1 \; |i = 1, 2, \ldots, k\}$. Pak v $H_b^{**} = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, resp. $H_{+\infty}^{**} = (\alpha, +\infty)$, resp. $H_{-\infty}^{**} = (-\infty, -\alpha)$ neleží žádný bod množiny B různý od b - spor s definicí hromadného bodu.

2 $\Rightarrow$ *3:* Nejdříve uvažujme $b \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme podle 2) v okolí $H_b\left(\frac{1}{n}\right) = \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ bod $x_n \in B - \{b\}$ (kandidátů na takové x_n je dokonce nekonečně mnoho). Protože $b - \frac{1}{n} < x_n < b + \frac{1}{n}$, je $\lim x_n = b$, a tedy posloupnost (x_n) má vlastnosti uvedené v 3).

Když $b = \pm\infty$, lze stejnou úvahu provést pro okolí $H_{-\infty}(n) = (-\infty, -n)$, resp. $H_{+\infty}(n) = (n, +\infty)$.

3 $\Rightarrow$ *1:* Z definice limity posloupnosti plyne, že v každém okolí H_b bodu b leží všechny členy posloupnosti x_n od jistého n_0 počínaje. Protože $x_n \neq b$ a $x_n \in B$, je průnik $H_b \cap B - \{b\}$ neprázdný, a tedy b je hromadným bodem množiny B. □

Již jsme konstatovali, že nekonečnost množiny je nutnou podmínkou pro to, aby množina měla nějaký hromadný bod. Následující věta ukazuje, že je to i podmínka postačující.

Věta 4.2.5. *Množina hromadných bodů nekonečné množiny* $A \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná.*

Důkaz. Uvažujme nekonečnou množinu A. Zkonstruujeme prostou posloupnost (y_n) takto: za y_1 zvolíme libovolný bod množiny A, za y_2 vezmeme libovolný bod množiny $A - \{y_1\}, \ldots$, za y_n vezmeme libovolný bod z množiny $A - \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$, atd.
Označme $\beta = \limsup y_n$. Ukážeme, že β je hromadným bodem množiny A. Podle definice limes superior existuje vybraná posloupnost (y_{k_n}) tak, že $\lim y_{k_n} = \beta$. Je-li $y_{k_n} \neq \beta$ pro

každé $n \in \mathbb{N}$, stačí za posloupnost (x_n) do bodu 3 předchozí věty vzít posloupnost (y_{k_n}), abychom ukázali, že β je hromadným bodem A.

Nechť existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $y_{k_p} = \beta$. Protože posloupnost (y_n) je prostá, je pro každé $n \neq p$ už $y_{k_n} \neq \beta$. Proto v tomto případě zvolíme za posloupnost (x_n) do přechozí věty posloupnost $(y_{k_{n+p}})$. □

Definice 4.2.6. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a $a \in (D_f)'$. Řekneme, že **funkce f má v bodě a limitu** $c \in \overline{\mathbb{R}}$, když

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in D_f \cap H_a - \{a\})(f(x) \in H_c)$$

a zapisujeme

$$\lim_a f = c \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \mapsto a} f(x) = c.$$

Poznámky k definici.

1. Limitu definujeme pouze v bodě a, který je hromadným bodem definičního oboru funkce f.

2. Definici limity lze ekvivalentně přepsat
$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in D_f - \{a\})(x \in H_a \Rightarrow f(x) \in H_c).$$

3. Reálná posloupnost (a_n) je také reálná funkce reálné proměnné s definičním oborem $\mathbb{N}$. Protože jediným hromadným bodem definičního oboru je $+\infty$, má smysl zkoumat limitu pouze v $+\infty$. Uvědomme si, že definice limity posloupnosti, jak jsme ji používali v předchozích kapitolách, a tato nová definice se pro posloupnosti shodují: Okolí bodu $+\infty$ má tvar $H_{+\infty} = (n_0, +\infty)$, $D_f = \mathbb{N}$, a proto část definice
$$(\exists H_{+\infty})(\forall n \in D_f \cap H_{+\infty} - \{+\infty\})$$
lze ekvivalentně přepsat
$$(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0),$$
jak jsme uváděli při definici limity posloupnosti.

4. Limita funkce v bodě a závisí na chování funkce v bodech blízkých bodu a, ne však v samotném bodě a. Na limitu funkce v bodě a nemá vliv to, zda funkce f je definována v bodě a, ani případná hodnota $f(a)$.

5. Když v definici limity patří body a a c do $\mathbb{R}$, mají okolí tvar $H_c = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε a $H_a = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné δ. Proto lze definici limity zapsat
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Podobně lze přepsat definici limity i pro jiné situace. Např. když $c = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$, má definice limity tvar

$$(\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\alpha).$$

Příklad 4.2.7. Dokážeme, že $\lim_{x \mapsto 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Pro libovolné kladné ε položíme $\delta = \min\{2\varepsilon, 1\}$. Pak pro každé $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{2\}$ platí

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - x}{2x} \right| < \frac{|2 - x|}{2} < \delta/2 \leq \varepsilon \ ,$$

jak jsme měli ukázat.

Věta 4.2.8. *Nechť f je reálná funkce reálné proměnné, $a \in (D_f)'$. Funkce f má v bodě a nanejvýš jednu limitu.*

Důkaz. Sporem - nechť c_1 a c_2 jsou různé limity funkce f v bodě a. Z vlastností okolí bodů existují navzájem disjunktní okolí $H^*_{c_1}$ a $H^*_{c_2}$. Z definice limity existuje k $H^*_{c_1}$ okolí $H^{(1)}_a$ tak, že pro každé $x \in D_f \cap H^{(1)}_a - \{a\}$ je $f(x) \in H^*_{c_1}$. Obdobně k $H^*_{c_2}$ existuje okolí $H^{(2)}_a$ tak, že pro každé $x \in D_f \cap H^{(2)}_a - \{a\}$ je $f(x) \in H^*_{c_2}$. Protože průnik $H^{(1)}_a \cap H^{(2)}_a$ dvou okolí jednoho bodu je opět okolím tohoto bodu, je množina $D_f \cap H^{(1)}_a \cap H^{(2)}_a - \{a\}$ neprázdná. Lze tedy vzít x z této množiny. Pro něj má současně platit $f(x) \in H^*_{c_1}$ a $f(x) \in H^*_{c_2}$. Přitom $H^*_{c_1} \cap H^*_{c_2} = \emptyset$ - spor. □

Mohlo by se zdát, že je zbytečné zvlášť definovat limitu posloupnosti, když tuto definici je možné zahrnout pod definici funkce. Další věta však ukazuje, že otázku existence a hodnoty limity funkce lze převést na limitu posloupnosti.

Věta 4.2.9. (Heineova věta) *Nechť f je funkce, $a \in (D_f)'$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = c \text{ pro každou posloupnost } (x_n), \text{ pro niž platí: } (\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f - \{a\}) \text{ a } \lim x_n = a.$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nechť $\lim_a f = c$, tj.

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in D_f \cap H_a - \{a\})(f(x) \in H_c). \tag{4.1}$$

Dále uvažujme posloupnost (x_n) mající limitu a a $x_n \in D_f - \{a\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$(\forall H_a)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(x_n \in H_a). \tag{4.2}$$

Pro libovolné H_c tedy podle 4.1 najdeme okolí H_a, k tomu podle 4.2 zase najdeme n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $x_n \in H_a$. Protože navíc je $x_n \in D_f - \{a\}$, lze do 4.1 za x dosadit x_n, čímž dostaneme $f(x_n) \in H_c$. Celkově máme

$$(\forall H_c)(\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(f(x_n) \in H_c),$$

což je symbolicky zapsáno $\lim f(x_n) = c$.

($\Leftarrow$) Nechť $\lim f(x_n) = c$ pro každou posloupnost (x_n) uvedených vlastností. Pro spor předpokládejme, že c není limitou funkce f v bodě a, tj.

$$(\exists H_c)(\forall H_a)(\exists x \in D_f \cap H_a - \{a\})(f(x) \notin H_c). \tag{4.3}$$

Za okolí H_a budeme do 4.3 dosazovat postupně pro každé přirozené n okolí $H_a^{(n)}$, kde $H_a^{(n)} = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$, když $a \in \mathbb{R}$, nebo $H_a^{(n)} = (-\infty, -n)$, když $a = -\infty$, nebo $H_a^{(n)} = (n, +\infty)$, když $a = +\infty$. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ tak z 4.3 dostaneme existenci $x_n \in D_f \cap H_a^{(n)} - \{a\}$, pro které je $f(x_n) \notin H_c$.
Jelikož $x_n \in H_a^{(n)}$ pro každé n, implikuje tvar okolí $H_a^{(n)}$ a věta o limitě sevřené posloupnosti, že $\lim x_n = a$. Nalezená posloupnost (x_n) má tedy požadované vlastnosti, a přitom $f(x_n) \notin H_c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ vylučuje, aby $\lim f(x_n)$ byla c - spor. $\square$

Heineovu větu lze použít na výpočet limity funkce pomocí limity posloupnosti, ale také na důkaz neexistence limity funkce.

Příklad 4.2.10. Pro každou reálnou posloupnost (α_n) s limitou $\alpha \in \mathbb{R}$ jsme odvodili, že $\lim e^{\alpha_n} = e^{\alpha}$. To podle Heineovy věty znamená, že

$$\lim_{x \mapsto \alpha} e^x = e^{\alpha}.$$

Příklad 4.2.11. Uvažujme funkci $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Protože 0 je hromadným bodem definičního oboru $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, má smysl počítat limitu v bodě 0. Zvolme dvě posloupnosti

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Hodnoty posloupnosti (x_n) a (y_n) jsou z definičního oboru funkce a obě posloupnosti mají limitu 0. Přitom

$$\lim_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = \lim_{n \mapsto +\infty} \sin(\pi n) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \mapsto +\infty} f(y_n) = \lim_{n \mapsto +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Heineova věta implikuje, že funkce $\sin \frac{1}{x}$ nemůže mít v bodě 0 limitu.

Příklad 4.2.12. Dokažme, že
$$\lim_{x\mapsto 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\ .$$
Podle Heineovy věty máme pro každou posloupnost (x_n) s limitou 0 a s členy z množiny $D_f - \{0\} = (-1,0)\cup(0,+\infty)$ ukázat, že $\lim(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$. Když k posloupnosti (x_n) daných vlastností definujeme posloupnost $(\alpha_n) = \left(\frac{1}{x_n}\right)$, pak $\lim|\alpha_n| = +\infty$ a můžeme přímo použít větu 3.7.8 odvozenou pro takové posloupnosti (α_n), totiž že $e = \lim\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \lim(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$.

Příklad 4.2.13. Další výsledek plyne z Heineovy věty a toho, že $\lim\ln a_n = \ln a$ pro každou kladnou posloupnost (a_n) s kladnou limitou a, viz 3.7.6. Proto
$$\lim_{x\mapsto a}\ln x = \ln a \quad \text{pro} \quad a>0.$$

Příklad 4.2.14. Podívejme se na limitu Riemannovy funkce. Ukážeme, že tato funkce má nulovou limitu v každém bodě $a\in\mathbb{R}$ a nemá limitu v bodech $\pm\infty$.

Mějme dané $a\in\mathbb{R}$ a libovolné kladné ε. Najdeme $k\in\mathbb{N}$ tak, aby $\frac{1}{k}<\varepsilon$. Označme
$$M = \left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}, a-1<\frac{p}{q}<a+1, \frac{p}{q}\neq a, q<k\right\}.$$
Množina M tedy obsahuje všechny zlomky se jmenovatelem menším než k, které jsou od čísla a ve vzdálenosti menší než 1. Do množiny M jsme však nezahrnuli a. Protože M je konečná množina a neobsahuje a, můžeme položit
$$\delta := \min\{|a-x|, x\in M\} > 0.$$
Uvažujme libovolné $x\in(a-\delta,a+\delta)$. Z definice δ plyne, že $x\notin M$, tj. buď x je iracionální a $f(x)=0$, nebo x je racionální, ale jeho jmenovatel ve zkráceném tvaru je větší nebo roven k, což implikuje $f(x)\leq\frac{1}{k}<\varepsilon$. Ukázali jsme:
$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\big(\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\big)\big(0\leq f(x)<\varepsilon\big) \quad\Longrightarrow\quad \lim_a f = 0\ .$$

Ukázat, že Riemannova funkce nemá v $+\infty$ limitu, je jednoduché. Stačí uvažovat dvě posloupnosti: racionální posloupnost (x_n) a iracionální (y_n) definované předpisy $x_n = n$ a $y_n = en$ (e je Eulerovo číslo). Protože $f(x_n)=1$ a $f(y_n)=0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, limita $\lim_{+\infty} f$ podle Heineovy věty neexistuje. Situace v $-\infty$ je obdobná.

Příklad 4.2.15. Funkce $sgn(x)$ je definovaná v celém $\mathbb{R}$. Uvažujme bod $a\neq 0$. Protože dostatečně malé okolí $H_a^{(0)}$ bodu a neobsahuje 0, je funkce $sgn(x)$ konstantní na $H_a^{(0)}$, a proto $|sgn(x)-sgn(a)| = 0 < \varepsilon$ pro každé kladné ε. To znamená, že
$$\text{pro}\quad a\neq 0\quad \text{je}\quad \lim_{x\mapsto a} sgn(x) = sgn(a).$$

Jiná je situace, když chceme určit limitu této funkce v bodě 0. Zvolíme-li dvě posloupnosti s nulovou limitou, a to $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ a $(y_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$, dostaneme $\lim sgn(x_n) = 1$ a $\lim sgn(y_n) = -1$. Opět z Heineovy věty plyne, že

$$\lim_{x \mapsto 0} sgn(x) \quad \text{neexistuje.}$$

Někdy je chování funkce v pravém a levém okolí bodu a tak rozdílné, že to vylučuje existenci limity. Zajímavá může být však i informace, že alespoň v jednom okolí se funkce chová "rozumně". Proto definujeme:

Definice 4.2.16. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem množiny $D_f \cap (a, +\infty)$, resp. $D_f \cap (-\infty, a)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě a zprava, resp. zleva limitu c, když zúžení $f_{/(a,+\infty)}$, resp. $f_{/(-\infty,a)}$ má v bodě a limitu c. Zapisujeme

$$\lim_{a_+} f = c \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \mapsto a_+} f(x) = c, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{a_-} f = c \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \mapsto a_-} f(x) = c.$$

Symbolicky lze existenci lmity zprava, resp. zleva zapsat:

$$\lim_{a_+} f = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall H_c)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, a < x < a + \delta)(f(x) \in H_c),$$

$$\lim_{a_-} f = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall H_c)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, a - \delta < x < a)(f(x) \in H_c).$$

Přímo z definice limity zleva a zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a definice limity v bodě a plyne následující věta.

Věta 4.2.17. *Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem množin $D_f \cap (a, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, a)$. Pak*

$$\lim_{a} f = c \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{a_+} f = \lim_{a_-} f = c.$$

Příklad 4.2.18. Zúžení funkce $f(x) = sgnx$ na interval $(0, +\infty)$ je funkce konstantně rovná 1, zatímco zúžení na interval $(-\infty, 0)$ je funkce konstantně rovná -1. Proto

$$\lim_{x \mapsto 0_+} sgn(x) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \mapsto 0_-} sgn(x) = -1.$$

Existenci limity posloupnosti zaručovala její monotonie. Stejně je tomu tak i u limity funkce.

Věta 4.2.19. *Nechť f je monotonní funkce na množině $D_f \cap (a, +\infty)$, jež má $a \in \mathbb{R}$ za hromadný bod. Pak existuje $\lim_{a_+} f$.*

Důkaz. Uvažujme f rostoucí na $D_f \cap (a, +\infty)$ a položme

$$\alpha = \inf\{f(x) \,|\, x \in D_f \cap (a, +\infty)\}.$$

Ukážeme, že α je limitou funkce f v bodě a zprava.

1) Nejdříve rozeberme případ $\alpha = -\infty$, tj. množina $\{f(x) \,|\, x \in D_f \cap (a, +\infty)\}$ není omezená zdola, symbolicky

$$(\forall K > 0)(\exists x_0 \in D_f \cap (a, +\infty)(f(x_0) < -K).$$

Když definujeme $\delta = x_0 - a > 0$ a využijeme, že pro $x < x_0 = \delta + a$ a $x \in D_f \cap (a, +\infty)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, dostaneme

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap (a, +\infty)(0 < x < a+\delta \Rightarrow f(x) < -K) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a_+} f = -\infty.$$

2) Uvažujme $\alpha \in \mathbb{R}$. Z první vlastnosti infima máme

$$\big(\forall x \in D_f \cap (a, +\infty)\big)\big(\alpha \leq f(x)\big).$$

Z druhé vlastnosti infima

$$(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists x_0 \in D_f \cap (a, +\infty)\big)\big(f(x_0) < \alpha + \varepsilon\big).$$

Když definujeme opět $\delta = x_0 - a > 0$ a využijeme, že pro $x < x_0 = \delta + a$ a $x \in D_f \cap (a, +\infty)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap (a, +\infty)(0 < x < a+\delta \Rightarrow \alpha \leq f(x) < \alpha+\varepsilon) \quad \Rightarrow \lim_{a_+} f = \alpha.$$

V případě klesající funkce f využijeme toho, že pro rostoucí funkci $-f$ jsme již dokázali existenci $\lim_{a_+}(-f)$. Z toho ale okamžitě plyne existence limity $\lim_{a_+} f$ a rovnost $\lim_{a_+} f = -\lim_{a_+}(-f)$. □

Poznámka.

1) Obdobnou větu lze vyslovit i o existenci limity zleva pro funkci monotonní na levém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

2) Pro $a \in \overline{\mathbb{R}} - \mathbb{R}$ platí modifikovaná verze:
Když f je monotonní na D_f a $+\infty \in D'_f$, resp. $-\infty \in D'_f$, pak existuje $\lim_{+\infty} f$, resp. $\lim_{-\infty} f$.

V předchozí větě jsme ukázali, že monotonie funkce je postačující podmínkou pro existenci limity, zdaleka to však není podmínka nutná. Následující **Bolzanovo-Cauchyovo**

kritérium je nutnou i postačující podmínkou existence **konečné** limity.

Věta 4.2.20. (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium) *Nechť* $a \in D'_f$. *Pak* $\lim_a f$ *existuje a je konečná, právě když platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists H_a)(\forall x, y \in D_f \cap H_a - \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Fakt, že $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$, lze ekvivalentně přepsat

$$(\forall \widetilde{\varepsilon} > 0)(\exists H_a)(\forall x \in D_f \cap H_a - \{a\})(|f(x) - c| < \widetilde{\varepsilon}) \ .$$

Uvažujme libovolné kladné ε. Když v předešlém tvrzení dosadíme za $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$, najdeme H_a tak, že pro libovolné reálné $x, y \in D_f \cap H_a - \{a\}$ je

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - c + c - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \widetilde{\varepsilon} + \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

což jsme měli dokázat.

($\Leftarrow$) Uvažujme posloupnost (x_n) s vlastností:

$$x_n \in D_f - \{a\} \text{ pro každé } n \text{ a } \quad \lim x_n = a. \tag{4.4}$$

Zvolme libovolné kladné ε. Podle pravé strany dokazované ekvivalence, z jejíž platnosti teď vycházíme, existuje H_a tak, že

$$(\forall x, y \in D_f \cap H_a - \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{4.5}$$

Jelikož $\lim x_n = a$, leží všechny členy posloupnosti (x_n) od jistého n_0 počínaje v okolí H_a. Proto lze pro $n, m > n_0$ dosadit do 4.5 za $x = x_n$ a za $y = x_m$. Odvodili jsme platnost výroku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0)(|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon),$$

což znamená, že posloupnost $(f(x_n))$ je cauchyovská, a tudíž má konečnou limitu. Teď ukážeme, že $\lim f(x_n)$ je stejná pro všechny posloupnosti (x_n) s vlastností 4.4.

Předpokládejme, že by existovaly dvě posloupnosti $(x_n^{(1)})$ a $(x_n^{(2)})$ požadovaných vlastností, přičemž $\lim f(x_n^{(1)}) = c_1$ a $\lim f(x_n^{(2)}) = c_2 \neq c_1$. Pak by posloupnost $(x_n^{(3)})$ definovaná předpisem

$$x_{2n}^{(3)} := x_n^{(1)} \quad \text{ a } x_{2n-1}^{(3)} := x_n^{(2)}$$

také měla vlastnost 4.4.

Posloupnost $\big(f(x_n^{(3)})\big)$ však nemá limitu, jelikož posloupnosti $\big(f(x_{2n}^{(3)})\big)$ a $\big(f(x_{2n-1}^{(3)})\big)$ mají různé limity. To je ale ve sporu s tím, že $(f(x_n))$ je cauchyovská, jakmile (x_n) má vlastnost 4.4. Tedy $\lim f(x_n)$ je konečná a stejná pro všechny posloupnosti (x_n) splňující 4.4, a to podle Heineovy věty znamená, že $\lim_a f$ existuje a je konečná. $\square$

4.3 Výpočet limity funkce

I pro limitu funkce lze vyslovit věty o limitě součtu, součinu atd. Heineova věta umožní, že technické důkazy, které jsme prováděli u posloupností, nemusíme už opakovat.

Věta 4.3.1.

$$\lim_a (f \pm g) = \lim_a f \pm \lim_a g, \qquad \lim_a (f.g) = \lim_a f . \lim_a g, \qquad \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$$

za předpokladu, že a je hromadným bodem množiny $D_{f \pm g}$, resp. $D_{f.g}$, resp. $D_{\frac{f}{g}}$ a výrazy vpravo mají smysl.

Důkaz. Ukážeme, jak z Heineovy věty a platnosti věty o limitě součtu dvou posloupností plyne věta o limitě součtu dvou funkcí. Pro další aritmetické operace je důkaz analogický.

Označme $c = \lim_a f$ a $d = \lim_a g$ a předpokládejme, že výraz $c + d$ má smysl. Z Heineovy věty víme, že pro každou posloupnost (x_n) s limitou a takovou, že $x_n \in D_f - \{a\}$, platí $\lim f(x_n) = c$. Obdobně pro každou posloupnost (y_n) s limitou a takovou, že $y_n \in D_g - \{a\}$, platí $\lim g(y_n) = d$.

Chceme-li ukázat, že $\lim_a (f + g) = c + d$, stačí podle Heineovy věty zkoumat limity posloupností $\big(f(z_n) + g(z_n)\big)$, kde (z_n) je libovolná posloupnost s limitou a taková, že $z_n \in D_{f+g} - \{a\}$. Uvědomme si, že $D_{f+g} = D_f \cap D_g$. Proto posloupnost (z_n) má vlastnosti posloupnosti (x_n) i vlastnosti posloupnosti (y_n). Z věty o limitě součtu dvou posloupností dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \big(f(z_n) + g(z_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) + \lim_{n\to+\infty} g(z_n) = c + d.$$

Tedy podle Heineovy věty je $\lim_a (f + g) = c + d$. $\square$

Následující věty uvedeme bez důkazu, jelikož jsou přímým důsledkem obdobných vět pro posloupnosti a Heineovy věty.

Věta 4.3.2. *Nechť a je hromadným bodem definičního oboru reálné funkce f reálné proměnné. Pak platí*

$$\lim_a f = c \qquad \Rightarrow \qquad \lim_a |f| = |c|,$$

$$\lim_a f = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_a |f| = 0.$$

Věta 4.3.3. *Nechť f je nezáporná funkce reálné proměnné, $a \in D'_f$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$\lim_a f = c \qquad \Rightarrow \qquad \lim_a \sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{c}.$$

Následující věta hraje při výpočtu limity funkce důležitou roli; roli daleko významnější než je role obdobné věty u posloupnosti, tedy věty o limitě skorovybrané posloupnosti.

Věta 4.3.4. (o limitě složené funkce) *Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem definičního oboru složené funkce $f \circ g$, nechť $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ a nechť jsou splněny tyto tři podmínky:*

1) $\lim_b f = c$,

2) $\lim_a g = b$,

3) buď $(\exists H_a^*)(\forall x \in D_g \cap H_a^* - \{a\})(g(x) \neq b)$ *nebo* $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Pak $\lim_a f \circ g = c$.

Důkaz. Napišme, co chceme dokázat:

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap D_{f\circ g} - \{a\})(f(g(x)) \in H_c). \tag{4.6}$$

Teď vyjmenujme ingredience, které máme k dispozici: $\lim_b f = c$ znamená

$$(\forall H_c)(\exists H_b)(\forall y \in H_b \cap D_f - \{b\})(f(y) \in H_c). \tag{4.7}$$

Obdobně přepíšeme $\lim_a g = b$:

$$(\forall H_b)(\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap D_g - \{a\})(g(x) \in H_b). \tag{4.8}$$

Vezměme libovolné okolí H_c, k němu z 4.7 nalezneme okolí H_b a k tomu zase podle 4.8 najdeme okolí H_a.

Uvažujme libovolné $x \in H_a \cap D_{f\circ g} - \{a\}$. Pro $x \in D_{f\circ g}$ lze spočítat $f(g(x))$, tedy $x \in D_g$ a $g(x) \in D_f$. Podle 4.8 je $g(x) \in H_b$. Tedy $g(x) \in H_b \cap D_f$. Kdyby bylo navíc $g(x) \neq b$, tak by vyhovovalo podmínkám kladeným na y v 4.7 a tudíž $f(g(x)) \in H_c$.

Použitím podmínek *1)* a *2)* máme

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap D_{f\circ g} - \{a\})\big(f(g(x)) \in H_c \text{ nebo } g(x) = b\big).$$

Abychom dostali 4.6, musíme odbourat "nebo $g(x) = b$". K tomu poslouží zbylá podmínka:

Jestliže z podmínky *3)* je splněno $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$, pak

$$g(x) = b \Rightarrow f(g(x)) = f(b) = c \in H_c,$$

jelikož každé reálné c leží ve svém okolí. Tedy $(\forall x \in H_a \cap D_{f\circ g} - \{a\})\big(f(g(x)) \in H_c\big)$.

Jestliže z podmínky *3)* je splněno $(\exists H_a^*)(\forall x \in D_g \cap H_a^* - \{a\})(g(x) \neq b)$, nevezmeme k okolí H_c přímo okolí H_a získané z 4.8, ale okolí H_a definované jako průnik H_a^* s okolím získaným z 4.8. Pro x z takového okolí bodu a se nestane, aby $g(x) = b$, tedy opět lze část "nebo $g(x) = b$" vynechat. $\square$

Poznámka. Předpoklad *3)* je pro platnost věty (a ne jenom pro správnost důkazu) podstatný. To dokládá následující příklad, ve kterém jsou splněny podmínky *1)* a *2)*, není však splněna *3)*. Položme

$$g(x) = 0 \;\text{ pro každé } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad f(y) = \begin{cases} 1, & \text{pro } y \neq 0, \\ 2, & \text{pro } y = 0. \end{cases}$$

Pak pro $a = 1$ dostaneme

$$b = \lim_{x \mapsto 1} g(x) = 0, \quad c = \lim_{y \mapsto 0} f(y) = 1.$$

Přitom $f(g(x))$ je funkce konstantně rovná 2, a proto

$$\lim_{x \mapsto 1} f(g(x)) = 2 \neq 1 = c.$$

Pomocí věty 4.3.4 teď odvodíme dvě důležité limity.

Příklad 4.3.5. Do věty o limitě složené funkce zvolíme

$$f(y) = \ln y, \quad g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad a = 0, \quad b = \lim_{x \mapsto 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad c = \lim_{y \mapsto e} \ln y = \ln e = 1.$$

Jelikož funkce $f(y) = \ln y$ je definovaná v bodě $b = e$ tak, že $f(b) = \ln e = 1 = c$, je splněna i podmínka *3)* z věty 4.3.4. Proto platí

$$\lim_{x \mapsto 0} f(g(x)) = \lim_{x \mapsto 0} \ln \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = 1.$$

Po úpravě

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \;.$$

Příklad 4.3.6. Do věty o limitě složené funkce teď zvolíme

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}, \quad g(x) = e^x - 1, \quad a = 0, \quad b = \lim_{x \mapsto 0} \big(e^x - 1\big) = 0, \quad c = \lim_{y \mapsto 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Protože $e^x = 1$ pouze pro $x = 0$, je pro libovolné okolí H_0^* bodu 0 splněno pro každé $x \in H_0^* - \{0\}$, že $g(x) = e^x - 1 \neq 0 = b$. Z věty o limitě složené funkce máme

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = 1.$$

Po úpravě dostaneme

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \;.$$

Kapitolu limita funkce zakončíme větami, které již v modifikované formě známe pro výpočet limity posloupnosti.

Věta 4.3.7. *Nechť* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *a nechť* f, g *jsou reálné funkce reálné proměnné takové, že existují* $\lim_a f$, $\lim_a g$ *a okolí* H_a^*, *pro něž* $H_a^* \cap D_f - \{a\} = H_a^* \cap D_g - \{a\} =: M$.

1) $\lim_a f < \lim_a g \implies (\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) < g(x))$,

2) $(\forall x \in M)(f(x) \le g(x)) \implies \lim_a f \le \lim_a g$.

Důkaz. Označme $c = \lim_a f$ a $d = \lim_a g$.
1) Protože $c < d$, najdeme disjunktní okolí H_c a H_d tak, že

$$(\forall y_1 \in H_c)(\forall y_2 \in H_d)(y_1 < y_2). \tag{4.9}$$

Z definice limity nalezneme k těmto okolím H_c, resp. H_d okolí $H_a^{(1)}$, resp. $H_a^{(2)}$ tak, že

$$(\forall x \in H_a^{(1)} \cap D_f - \{a\})(f(x) \in H_c) \qquad \text{a} \qquad (\forall x \in H_a^{(2)} \cap D_g - \{a\})(g(x) \in H_d).$$

Položíme-li teď $H_a = H_a^{(1)} \cap H_a^{(2)} \cap H_a^*$, dostaneme pro každé $x \in H_a \cap M$, že $f(x) \in H_c$ a $g(x) \in H_d$. Z 4.9 už plyne, že $f(x) < g(x)$.

2) Důkaz sporem za použití bodu 1) je přenechán čtenáři. □

Věta 4.3.8. *Nechť pro bod* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *a funkce* f, g, h *platí:*

1) *existuje okolí* H_a^* *tak, že* $D_f \cap H_a^* - \{a\} = D_g \cap H_a^* - \{a\} = D_h \cap H_a^* - \{a\} =: M$,
2) *pro každé* $x \in M$ *je* $f(x) \le g(x) \le h(x)$,
3) $\lim_a f = \lim_a h = c$.

Pak existuje i $\lim_a g$ *a je rovna* c.

Důkaz. Zvolme libovolnou posloupnost (x_n) takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in D_g - \{a\}$ a jejíž limita je a. Z $\lim x_n = a$ plyne, že od jistého n_0 počínaje, je $x_n \in H_a^*$. Tedy podle předpokladu 1) je až na konečný počet výjimek $x_n \in D_f - \{a\}$ a současně je $x_n \in D_h - \{a\}$. Z Heineovy věty a předpokladu 3) plyne

$$\lim_{n \mapsto +\infty} f(x_n) = \lim_{n \mapsto +\infty} h(x_n) = c.$$

Podle předpokladu 2) pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, je

$$f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n).$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti dává $\lim g(x_n) = c$. Tedy pro libovolnou posloupnost (x_n) zvolených vlastností jsme ukázali, že limita posloupnosti funkčních hodnot $\big(g(x_n)\big)$ je c. Podle Heineovy věty je to ekvivalentní s tvrzením $\lim_a g = c$. $\square$

Příklad 4.3.9. Geometrická interpretace hodnoty $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ k danému úhlu x na jednotkové kružnici nám dá nerovnost[1]

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{pro} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.10}$$

Protože $\sin x$ je lichá funkce, máme $-|x| \le \sin x \le |x|$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Jelikož $\lim_0 x = 0$, dostaneme z věty o limitě absolutní hodnoty $\lim_0 |x| = 0$ a z věty o limitě sevřené funkce

$$\lim_{x \mapsto 0} \sin x = 0.$$

Na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Předchozí limita implikuje $\lim_0 \cos x = 1$. Z 4.10 dostaneme

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{pro} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.11}$$

Jelikož funkce $\cos x$ a $\frac{\sin x}{x}$ jsou sudé funkce, platí 4.11 také pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Opět z věty o limitě sevřené funkce dostaneme

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

4.4 Spojitost funkce

Spojitost v bodě

Definice 4.4.1. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a, když

$$\big(\forall H_{f(a)}\big)\,(\exists H_a)(\forall x \in D_f \cap H_a)\,\big(f(x) \in H_{f(a)}\big)\ .$$

O bodu a také říkáme, že je bodem spojitosti funkce f.

Protože body a a $f(a)$ jsou prvky $\mathbb{R}$, je každé okolí H_a tvaru $(a-\delta, a+\delta)$ pro nějaké kladné δ a každé okolí $H_{f(a)}$ je tvaru $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Definici

[1] Zde se dopouštíme jisté nedůslednosti, přesné odvození nerovností není možné prostředky, které máme k dispozici. K tomuto problému se vrátíme, až zavedeme pojem délka grafu funkce.

spojitosti lze proto ekvivalentně přepsat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\,(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\ . \tag{4.12}$$

Poznámky k definici:

1) Nechť $a \in D_f$ je izolovaným bodem definičního oboru, tj. $(\exists H_a^*)(D_f \cap H_a^* = \{a\})$. V tomto případě ke každému $H_{f(a)}$ vezmeme okolí $H_a := H_a^*$. Pak vztah $x \in D_f \cap H_a$ splňuje jediné $x = a$, a proto automaticky $f(x) = f(a) \in H_{f(a)}$. Tedy **každý izolovaný bod definičního oboru je bodem spojitosti**.

2) Nechť $a \in D_f$ je hromadným bodem definičního oboru. Pak 4.12 je ekvivalentní se zápisem, že limita funkce f v bodě a je $f(a)$. Je to sice banální pozorování, ale s důležitými důsledky, proto je formulujeme ve tvaru věty.

Věta 4.4.2. *Nechť $a \in D_f \cap D_f'$. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim_a f = f(a)$.*

Příklad 4.4.3. 1) Protože $\lim_a e^x = e^a$, je funkce $f(x) = e^x$ spojitá v každém reálném bodě a.

2) Protože $\lim_a \ln x = \ln a$ pro $a > 0$, je funkce $f(x) = \ln x$ spojitá v každém kladném bodě a.

3) Protože $\lim_a sgn(x) = sgn(a)$ pro $a \neq 0$ a neexistuje $\lim_0 sgn(x)$, je funkce $f(x) = sgn(x)$ spojitá v každém $a \neq 0$ a není spojitá v bodě 0.

4) Protože $\lim_a \sin x = \sin a$ a také $\lim_a \cos x = \cos a$, jsou funkce sin a cos spojité v každém reálném bodě a.

Věta 4.4.4. *Nechť f a g jsou funkce spojité v bodě a. Pak funkce $|f|$, $f \pm g$, $f.g$ a f/g (pokud $g(a) \neq 0$) jsou funkce spojité v bodě a.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme pouze pro součet funkcí; důkaz ostatních tvrzení je analogický. Když a je izolovaným bodem D_{f+g}, pak automaticky je funkce $f+g$ spojitá v a. Když a je hromadným bodem D_{f+g}, pak $a \in D_f'$ a současně $a \in D_g'$. Ze spojitosti funkcí f a g v bodě a plyne, že $\lim_a f = f(a)$ a $\lim_a g = g(a)$. Z věty o limitě součtu je $\lim_a (f+g) = f(a) + g(a)$. To ovšem znamená, že funkce $f+g$ je spojitá v bodě a. $\square$

Věta 4.4.5. *Nechť g je funkce spojitá v bodě a, f funkce spojitá v bodě $g(a)$. Pak funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Z předpokladů plyne, že $a \in D_{f\circ g}$, proto má smysl mluvit o spojitosti složené funkce v bodě a. Když a je izolovaným bodem množiny $D_{f\circ g}$, pak je zřejmě tvrzení pravdivé.

Nyní předpokládejme, že $a \in D_{f\circ g}'$. Pak $a \in D_g'$ a ze spojitosti je $\lim_a g = g(a)$. Když $g(a)$ je hromadným bodem funkce f, pak ze spojitosti funkce f máme $\lim_{g(a)} f = f(g(a))$.

Použijeme větu o limitě složené funkce, protože i třetí předpoklad této věty je splněný (konkrétně jeho druhá část). Celkově dostaneme $\lim_a f \circ g = f(g(a))$.
Zbývá diskutovat případ $a \in D'_{f\circ g}$ a $g(a)$ izolovaný bod D_f. To znamená, že existuje okolí $H^*_{g(a)}$ takové, že $D_f \cap H^*_{g(a)} = \{g(a)\}$. Protože $\lim_a g = g(a)$, je i limita zúžení $\lim_a g_{/D_f\circ g} = g(a)$. Tedy pro každé okolí bodu $g(a)$, speciálně i pro okolí $H^*_{g(a)}$, existuje jisté okolí H_a bodu a takové, že pro všechny hodnoty $x \in H_a \cap D_{f\circ g}$ padne $g(x)$ do $H^*_{g(a)} \cap D_f = \{g(a)\}$. To je možné jen tak, že pro jisté okolí H_a bodu a je funkce g konstantní na množině $H_a \cap D_{f\circ g}$, tj. $g(x) = g(a)$. To ovšem znamená, že funkce $f \circ g$ je na množině $H_a \cap D_{f\circ g}$ konstantně rovna $f(g(a))$, a proto $\lim_a f(g(x)) = f(g(a))$, tj. $f \circ g$ je spojitá v a. □

Příklad 4.4.6. Funkci $h(x) = x^\alpha$ s definičním oborem $D_h = (0, +\infty)$ lze napsat jako $h(x) = e^{\alpha \ln x}$. Tedy h je složená funkce $h = f \circ g$, kde $f(y) = e^y$ a $g(x) = \alpha \ln x$. Jak jsme už ukázali, f je spojitá na celém $\mathbb{R}$ a g je spojitá v každém kladném bodě a. Proto i funkce $h(x) = x^\alpha$ je spojitá v každém kladném bodě a.

Definice 4.4.7. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a zleva, resp. zprava, když $\lim_{a+} f = f(a)$, resp. $\lim_{a-} f = f(a)$.

Příklad 4.4.8. 1) Funkce $f(x) = x - [x]$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. V bodě $a \in \mathbb{Z}$ je funkce f spojitá zprava, není však spojitá zleva.
2) Funkce $f(x) = sgn(x)$ je spojitá v každém bodě $a \neq 0$, v bodě 0 není sgn spojitá ani zleva ani zprava.

Poznámka.
1) Spojitost funkce v bodě a zleva, resp. zprava je definovaná pouze v případě, když $a \in D_f$ a $a \in \big(D_f \cap (a, +\infty)\big)'$, resp. $a \in \big(D_f \cap (-\infty, a)\big)'$.
2) Když $a \in D_f$, $a \in \big(D_f \cap (a, +\infty)\big)'$ a $a \in \big(D_f \cap (-\infty, a)\big)'$, je funkce f spojitá v bodě a tehdy a jen tehdy, když je f spojitá v bodě a zleva i zprava.

Poznámka.
Někdy se zavádí pojem **bod nespojitosti** funkce. Definuje se takto: bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem D_f, nazveme bodem nespojitosti funkce f, když a není bodem spojitosti funkce f, tj. buď $a \notin D_f$ nebo $a \in D_f$, ale $\lim_a f$ není rovna $f(a)$.

Některé typy nespojitosti dostaly i svá jména:

i) **Odstranitelná nespojitost** se nazývá takový bod a nespojitosti funkce f, pro který $\lim_a f \in \mathbb{R}$.
Např. funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má v bodě 0 odstranitelnou nespojitost.

ii) **Bod skoku** se nazývá bod $a \in \mathbb{R}$, ve kterém existují konečné navzájem různé limity $\lim_{a+} f$ a $\lim_{a-} f$.
Např. funkce $f(x) = x - [x]$ má skok v každém $a \in \mathbb{Z}$.

Existují samozřejmě i jiné druhy nespojitosti. Např. $f(x) = \frac{1}{x}$ má v bodě 0 limitu zprava $+\infty$ a zleva $-\infty$, bod 0 je proto bodem nespojitosti, ale není to ani odstranitelná nespojitost ani bod skoku;
funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ má v bodě 0 limitu $+\infty$, opět je to bod nespojitosti, který nepatří do skupiny i) ani ii).

Příklad 4.4.9. Počet bodů nespojitosti dané funkce může být libovolně velký. Např. Riemannova funkce je spojitá ve všech iracionálních bodech, ale nespojitá v každém racionálním bodě. Dirichletova funkce je nespojitá v každém bodě.

Poznámka. Funkce f definovaná a monotonní na nějakém uzavřeném intervalu může mít podle věty 4.2.19 nespojitost pouze typu skok.

Vyšetřujme množinu skoků funkce f, která je rostoucí na nějakém omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro rostoucí funkci platí

$$\lim_{c-} f \le \lim_{c+} f \quad \text{pro } c \in (a,b) \quad \text{a} \quad f(a) \le \lim_{a+} f, \quad \lim_{b-} f \le f(b).$$

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ je bodů c, ve kterých je skok větší než $\frac{1}{n}$, jenom konečně mnoho, jelikož f je omezená zdola konstantou $f(a)$ a shora konstantou $f(b)$. Tedy množina

$$M_n = \left\{ c \in (a,b) | \lim_{c+} f \ge \lim_{c-} f + \frac{1}{n} \right\}$$

je konečná. Protože množina všech bodů skoku je podmnožinou $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) \cup \{a, b\}$, je podle věty 1.4.9 množina všech skoků funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše spočetná.

Každý interval J lze vyjádřit jako nejvýše spočetné sjednocení omezených uzavřených intervalů. Proto platí:

Funkce monotonní na intervalu má nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti.

Spojitost na intervalu

Definice 4.4.10. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a J interval takový, že $J \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** J, když zúžení $f_{/J}$ je funkce spojitá v každém bodě intervalu J.

Příklad 4.4.11. Funkce $f(x) = x - [x]$ je spojitá na intervalu $J = \langle -1, 0)$. Samotná funkce f však není spojitá v bodě -1, její zúžení $f_{/J}$ je už spojité i v bodě -1.

Věta 4.4.12. *Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $f(a).f(b) < 0$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Pro důkaz použijeme tzv. metodu půlení intervalů. Rozpůlíme interval $\langle a, b\rangle$. Je-li $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, jsme s důkazem hotovi. Je-li $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, vybereme pro další krok ten z intervalů $\left\langle a, \frac{a+b}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{a+b}{2}, b\right\rangle$, v jehož krajních bodech mají funkční hodnoty různá znaménka. Vybraný interval označíme $\langle a_1, b_1\rangle$. Máme-li již zkonstruovaný interval $\langle a_i, b_i\rangle$ takový, že

$$f(a_i) < 0 \quad \text{a} \quad f(b_i) > 0, \tag{4.13}$$

zkoumáme funkční hodnotu v průměru $\frac{a_i+b_i}{2}$. Znaménko funkční hodnoty rozhoduje o dalším postupu takto:

$$\text{když} \quad f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \begin{cases} = 0, & \text{položíme} \quad c := \frac{a_i+b_i}{2} \quad \text{a STOP} \\ > 0, & \text{klademe} \quad a_{i+1} := a_i, \quad b_{i+1} := \frac{a_i+b_i}{2}; \\ < 0, & \text{klademe} \quad a_{i+1} := \frac{a_i+b_i}{2}, \quad b_{i+1} := b_i. \end{cases}$$

S konstrukcí párů a_i, b_i přestaneme, pokud funkční hodnota v průměru je rovna 0. Nestane-li se tak pro žádné přirozené i, dostaneme dvě posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pro něž platí:

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle \ , \quad a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \quad \text{a} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Tedy obě posloupnosti jsou monotonní, omezené a vzdálenost mezi členy těchto posloupností má limitu 0. Proto mají obě posloupnosti stejnou konečnou limitu. Označme

$$c = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \in \langle a, b\rangle \ .$$

Ze spojitosti funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a z Heineovy věty plyne

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ .$$

Z věty o nerovnostech v limitách a z 4.13 dostaneme

$$0 \ge \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0 \ ,$$

což implikuje $f(c) = 0$. □

Poznámka.

1) V předchozím důkazu jsme existenci c demonstrovali tak, že jsme popsali návod, chcete-li algoritmus, jak c najít. Takovému typu důkazu se říká **konstruktivní důkaz**. Popsaný algoritmus se v praxi skutečně používá na hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$.

2) Pro řešení nerovnic je důležitý tento důsledek věty:
Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J$ je $f(x) \neq 0$. Pak funkce f

nemění v intervalu J znaménko, tj. buď pro každé $x \in J$ je $f(x) > 0$ nebo pro každé $x \in J$ je $f(x) < 0$.

Věta 4.4.13. *Nechť f je funkce spojitá na intervalu J. Pak $f(J)$ je interval nebo jednoprvková množina.*

Důkaz. Když $f(J)$ je jednoprvková množina, jsme s důkazem hotovi. Uvažujme proto, že $f(J)$ má alespoň dva prvky. Chceme-li dokázat, že $f(J)$ je interval, musíme ukázat, že libovolné reálné číslo z, které leží mezi dvěma prvky množiny $f(J)$, také patří do množiny $f(J)$.
Nechť $y_1, y_2 \in f(J), y_1 < y_2$ a nechť z je libovolné pevně zvolené reálné číslo, pro které platí $y_1 < z < y_2$.

Definujeme funkci $g : J \mapsto \mathbb{R}$ předpisem $g(x) := f(x) - z$ pro každé $x \in J$. Tato funkce je rozdílem funkce f, která je spojitá podle předpokladu věty, a konstanty, která je také spojitou funkcí. Celkově tedy g je spojitá na intervalu J. Protože $y_1, y_2 \in f(J)$, existují $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. To implikuje $g(x_1) = y_1 - z < 0$ a $g(x_2) = y_2 - z > 0$. Uvažujme uzavřený interval J_0, jehož hranice tvoří body x_1 a x_2. Jelikož $g(x_1).g(x_2) < 0$, existuje podle předchozí věty $c \in J_0 \subset J$ tak, že $0 = g(c) = f(c) - z$, tj. $f(c) = z$. To znamená, že $z \in f(J)$, což jsme měli dokázat. $\square$

Poznámka. Matematici vyslovují předchozí větu heslovitě "spojitý obraz intervalu je interval nebo bod".

Věta 4.4.14. *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $J = \langle a, b\rangle$. Pak platí:*

1) $f(J)$ je omezená množina;

2) existují $c, d \in \langle a, b\rangle$ taková, že $f(c) = \sup f(J)$ a $f(d) = \inf f(J)$.

Důkaz. 1) Omezenost ukážeme sporem. Nechť např. $f(J)$ není omezená shora, symbolicky $(\forall n \in \mathbb{N})\big(\exists x_n \in \langle a, b\rangle\big)\big(f(x_n) > n\big)$. Dostaneme tedy posloupnost (x_n) omezenou zdola číslem a, shora číslem b. Její limes superior je tedy reálné číslo. Označme $\beta = \limsup x_n$. Z posloupnosti (x_n) lze vybrat posloupnost (x_{k_n}) tak, že $\lim x_{k_n} = \beta \in \langle a, b\rangle$. Ze spojitosti funkce f v bodě β a z Heineovy věty dostaneme $\lim f(x_{k_n}) = f(\beta)$. Na druhé straně čísla x_n byla nalezena tak, aby $f(x_n) > n$, tj. $\lim f(x_n) = +\infty$ a tudíž i limita posloupnosti $\big(f(x_{k_n})\big)$ z ní vybrané je $+\infty$ - spor.

2) I tuto část tvrzení dokážeme sporem. Označme $\beta = \sup f(J)$. Z bodu 1) již víme, že $\beta \in \mathbb{R}$. Kvůli sporu předpokládejme, že

$$(\forall x \in \langle a, b\rangle)(f(x) < \sup f(J) = \beta). \tag{4.14}$$

Definujme funkci g předpisem $g(x) := \frac{1}{\beta - f(x)}$. Protože jmenovatel je podle 4.14 kladný, je tato funkce definovaná a spojitá na celém intervalu J. Podle bodu 1) je $g(J)$ omezená množina. Existuje tedy konstanta $k > 0$ tak, že $\forall x \in J$ je $\frac{1}{\beta - f(x)} \leq k$. Odtud plyne, že $f(x) \leq \beta - \frac{1}{k}$ pro všechna $x \in J$, což už je ve sporu s tím, že β je $\sup f(J)$. $\square$

Poznámka.
1) Druhou část předchozí věty lze heslovitě vyslovit "funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá v něm svého suprema i infima".
2) Uzavřenost intervalu J je pro platnost obou částí předchozí věty podstatná. Kupříkladu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $J = (0, 1)$, ale množina $f(J)$ není omezená a f nenabývá suprema ani infima na tomto intervalu.
3) Obraz intervalu $J = \langle a, b\rangle$ spojitým zobrazením f je podle druhé části věty (v případě, že f není konstantní funkce) interval $\langle f(d), f(c)\rangle$. Heslovitě: "spojitý obraz uzavřeného intervalu je uzavřený interval nebo bod".
4) Spojitý obraz otevřeného intervalu může být interval libovolného typu. Např. pro funkci sin platí

$$\sin\big((0, \pi/2)\big) = (0, 1), \quad \sin\big((0, \pi)\big) = (0, 1\rangle, \quad \sin\big((0, 2\pi)\big) = \langle -1, 1\rangle.$$

Věta 4.4.15. *Nechť f je spojitá a prostá na intervalu J. Pak*
1) f je ryze monotonní na J;
2) $f^{-1}_{/J}$ je spojitá na intervalu $f(J)$.

Důkaz. 1) Předpokládejme kvůli sporu, že f není ani ostře rostoucí, ani ostře klesající. Funkce f je prostá, proto existuje trojice prvků $x_1, x_2, x_3 \in J$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$ a buď $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_2) > f(x_3)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$ a $f(x_2) < f(x_3)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že nastal případ $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Zvolíme z tak, aby $f(x_2) > z > \max\{f(x_1), f(x_3)\}$. Protože obraz intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ při zobrazení f je interval, najdeme $\tilde{x}_1 \in (x_1, x_2)$ tak, že $f(\tilde{x}_1) = z$ a obdobně najdeme $\tilde{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tak, že $f(\tilde{x}_2) = z$. To znamená, že pro různé body $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ je $f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_2) = z$ - spor s prostotou funkce.

2) $f^{-1}_{/J}$ je tedy ryze monotonní, uvažujme např. $f^{-1}_{/J}$ ostře rostoucí. Pro důkaz spojitosti funkce $f^{-1}_{/J}$ na intervalu $f(J)$ stačí ukázat, že $\lim_a f^{-1}_{/J} = f^{-1}_{/J}(a)$ pro každé $a \in f(J)$. Existence jednostranné limity $\lim_{a_+} f^{-1}_{/J}$, resp. $\lim_{a_-} f^{-1}_{/J}$ plyne z věty o limitě monotonní funkce, kde jsme pro rostoucí funkci ukázali

$$\lim_{a_-} f^{-1}_{/J} = \sup\{f^{-1}_{/J}(x) \mid x \in f(J) \cap (-\infty, a)\},$$

respektive

$$\lim_{a_+} f^{-1}_{/J} = \inf\{f^{-1}_{/J}(x) \mid x \in f(J) \cap (a, +\infty)\}.$$

Z monotonie funkce $f_{/J}^{-1}$ plyne, že $\lim_{a_-} f_{/J}^{-1} \leq f_{/J}^{-1}(a)$, resp. $f_{/J}^{-1}(a) \leq \lim_{a_+} f_{/J}^{-1}$. Kdyby např. $\lim_{a_-} f_{/J}^{-1} < f_{/J}^{-1}(a)$, pak by obrazem intervalu $f(J)$ při zobrazení $f_{/J}^{-1}$ nemohl být interval, a přitom víme, že $f_{/J}^{-1}\big(f(J)\big) = J$ - spor. Proto je $\lim_{a_-} f_{/J}^{-1} = f_{/J}^{-1}(a)$, resp. $\lim_{a_+} f_{/J}^{-1} = f_{/J}^{-1}(a)$, což implikuje spojitost v bodě a. □

Stejnoměrná spojitost

Uvažujme reálnou funkci reálné proměnné, jejíž definiční obor obsahuje interval J. Spojitost funkce f na intervalu J lze zapsat takto:

$$(\forall x \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in J)(|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

Kladné δ, které podle definice nalezneme, je obecně závislé na ε a $x \in J$. Když lze zvolit univerzální (stejné) δ pro všechna $x \in J$, tedy δ závislé pouze na ε, mluvíme o stejnoměrné spojitosti. Přesněji:

Definice 4.4.16. Nechť funkce f je definovaná na intervalu J. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá na** J, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in J)(|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

Poznámka. **i)** Stejnoměrná spojitost je pojem svázaný s intervalem. Nemá smyslu mluvit o stejnoměrné spojitosti funkce bez udání intervalu. Jak vyplyne z dalšího textu, např. funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, 1)$, ale je stejnoměrně spojitá na $(1, 2)$.

ii) Z definice plyne, že když f je stejnoměrně spojitá na intervalu J, pak je též stejnoměrně spojitá na každém podintervalu $J_1 \subset J$.

Příklad 4.4.17. Funkce $f(x) = x$ je stejnoměrně spojitá na celém $\mathbb{R}$. K libovolnému kladnému ε stačí položit $\delta := \varepsilon$. Platnost implikace

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |x - x'| < \varepsilon = \delta$$

je pro každé $x, x' \in \mathbb{R}$ zřejmá.

Příklad 4.4.18. Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je stejnoměrně spojitá na $\langle 1, +\infty)$. Při volbě $\delta := \varepsilon$ platí totiž pro $x, x' \geq 1$

$$|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} < |x - x'| < \delta = \varepsilon,$$

což dokazuje stejnoměrnou spojitost.

Příklad 4.4.19. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$. Abychom to dokázali, musíme ukázat

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, x' \in (0,1))(|x - x'| < \delta \ \text{ a } \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| \geq \varepsilon).$$

Vezmeme-li za $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pak pro libovolné $\delta > 0$ stačí vzít jakékoliv $x \in (0, 1/2)$, které je menší než δ a položit $x' = 2x$, abychom dostali

$$|x - x'| = |x - 2x| = |x| < \delta \quad \text{ a } \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right| = \frac{1}{2x} > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Věta 4.4.20. (Věta Cantorova) *Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Důkaz. Kvůli sporu předpokládejme, že

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, x' \in \langle a, b\rangle)(|x - x'| < \delta \ \text{ a } \ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon).$$

Máme tedy pevné ε a za δ postupně bereme $\delta = 1, \delta = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{3}, \ldots$ Pro každé takové $\delta = \frac{1}{n}$ dostaneme pár $x_n, x'_n \in \langle a, b\rangle$ splňující

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad \text{ a } \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Protože členy posloupnosti (x_n) leží v intervalu $\langle a, b\rangle$, je i limes superior této posloupnosti z intervalu $\langle a, b\rangle$. Lze tedy vybrat posloupnost (x_{k_n}) tak, aby $\lim x_{k_n} = \beta \in \langle a, b\rangle$. Jelikož $|x'_{k_n} - x_{k_n}| < \frac{1}{k_n}$, je i limita posloupnosti (x'_{k_n}) rovna β. Funkce f je podle předpokladu spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, a tedy i v bodě β. Z Heineovy věty proto dostaneme

$$\lim_{n \mapsto +\infty} f(x_{k_n}) = f(\beta) = \lim_{n \mapsto +\infty} f(x'_{k_n}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \Big(f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})\Big) = 0.$$

To je ale v rozporu s tím, že pro pevné ε je $\Big|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})\Big| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Poznámka. Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na intervalech J_1 a J_2, jejichž průnik $J_1 \cap J_2$ je neprázdný, pak funkce f je stejnoměrně spojitá i na intervalu $J = J_1 \cup J_2$. Dokážeme si formálně toto zřejmé tvrzení. Stejnoměrná spojitost f na J_1 znamená:

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x, x' \in J_1)(|x - x'| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \tilde{\varepsilon}).$$

Podobně stejnoměrná spojitost funkce f na J_2 značí:

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x, x' \in J_2)(|x - x'| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \tilde{\varepsilon}).$$

Pro kladné ε položíme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$ a po nalezení δ_1 a δ_2 z předchozích výroků stačí položit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Nyní když zvolíme libovolně dva body x, x' tak, že oba patří do stejného intervalu, řekněme J_1, platí

$$|x - x'| < \delta \leq \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon.$$

Když x, x' nepatří do stejného intervalu, najdeme bod $p \in J_1 \cap J_2$ tak, aby p leželo mezi x a x'. Pro takové p dostaneme

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow |x - p| < \delta \;\text{ a }\; |x' - p| < \delta.$$

Odtud

$$|f(x) - f(p)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{a} \quad |f(x') - f(p)| < \tilde{\varepsilon},$$

což implikuje

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(p)| + |f(x') - f(p)| < 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Příklad 4.4.21. Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je podle Cantorovy věty stejnoměrně spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ a podle příkladu 4.4.18 také na intervalu $\langle 1, +\infty)$. Z předchozí poznámky proto plyne, že f je stejnoměrně spojitá na $\langle 0, +\infty)$.

Poznámka. Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu J, jsou na tomto intervalu spojité i funkce $f.\ g$ a $f + g$. Je zajímavé zmínit, že součet dvou funkcí stejnoměrně spojitých na J je opět stejnoměrně spojitý (důkaz přenecháme čtenáři), zatímco součin dvou stejnoměrně spojitých funkcí už nemusí být stejnoměrně spojitý.
Příkladem takové situace je součin dvou na $\mathbb{R}$ stejnoměrně spojitých funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = \sin x$. Čtenář ať sám ověří, že funkce $(f.\ g)(x) = x \sin x$ není na $\mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

4.5 Derivace funkce

Definice 4.5.1. Nechť $a \in D_f \cap D'_f$. Limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme **derivací funkce** f **v bodě** a a značíme $f'(a)$. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že f je **diferencovatelná** v bodě a.

Poznámka. $f'(a)$ lze ekvivalentně zapsat

$$f'(a) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Příklad 4.5.2. Uvažujme funkci $f(x) = b^x$ pro $b \neq 1, b > 0$.

$$f'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \mapsto a} b^a \, \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \lim_{x \mapsto a} \frac{e^{(x-a)\ln b} - 1}{(x-a)\ln b} \, \ln b = b^a \, \ln b.$$

Příklad 4.5.3. Spočítejme derivaci funkce $f(x) = \ln x$.

$$f'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \mapsto a} \frac{1}{a} \, \frac{\ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = \frac{1}{a} \lim_{y \mapsto 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{a}.$$

Příklad 4.5.4. Uvažujme funkci $f(x) = sgn(x)$. Když bod $a \neq 0$, pak na jistém okolí bodu a je funkce konstantní, a proto je derivace v nenulovém bodě rovna 0. Teď uvažujme bod $a = 0$. Zde

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sgn(x) - sgn(0)}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Celkově lze zapsat

$$f'(a) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \neq 0, \\ +\infty & \text{pro } a = 0. \end{cases}$$

Příklad 4.5.5. Pro funkci $f(x) = |x|$ je

$$f'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = sgn(a) \quad \text{pro } a \neq 0,$$

zatímco derivace v bodě 0 neexistuje.

Věta 4.5.6. *Nechť f je diferencovatelná v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Spočítejme limitu

$$\lim_{x \mapsto a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, (x - a) = f'(a).0 = 0.$$

Tedy $\lim_a f = f(a)$, což znamená, že funkce f je spojitá v bodě a. □

Poznámka.
1) V předchozí větě nelze zaměnit předpoklad diferencovatelnosti v bodě a předpokladem existence derivace v bodě a. Jak ukazuje příklad 4.5.4, funkce signum má v bodě 0 derivaci $+\infty$, ale není v bodě 0 spojitá.
2) Implikaci v předchozí větě nelze obrátit. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, ale podle příkladu 4.5.5 derivace v bodě 0 neexistuje.

Definice 4.5.7. Limitu

$$\lim_{x \mapsto a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \mapsto a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pokud existuje, nazýváme **derivací funkce f v bodě a zprava**, resp. **zleva** a značíme $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$.

Příklad 4.5.8. Funkce $f(x) = x - [x]$ má v každém bodě $a \in \mathbb{Z}$

$$f'_+(a) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(a) = -\infty.$$

Věta 4.5.9. *Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Pak*

$$\begin{array}{lll} i) & (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), & \textit{pokud} \quad a \in D'_{f\pm g}, \\ ii) & (f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a), & \textit{pokud} \quad a \in D'_{f.g}, \\ iii) & \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}, & \textit{pokud} \quad a \in D_{f/g} \cap D'_{f/g}. \end{array}$$

Důkaz. *i)* Z definice derivace a věty o limitě součtu dostaneme

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \mapsto a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) + g'(a).$$

Pro rozdíl funkcí je důkaz analogický.

ii) Derivaci součinu získáme následujícími úpravami:

$$(f.g)'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(a)}{x - a} = \lim_{x \mapsto a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \mapsto a} \frac{\big(f(x) - f(a)\big)g(a) + f(x)\big(g(x) - g(a)\big)}{x - a} =$$

$$= g(a). \lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \mapsto a} f(x). \lim_{x \mapsto a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= g(a).f'(a) + f(a).g'(a).$$

Při úpravách jsme využili toho, že diferencovatelnost funkce f v bodě a implikuje spojitost v bodě a, tj. $\lim_a f = f(a)$.
Důkaz věty pro derivaci podílu je obdobný a přenecháme jej čtenáři. □

Poznámka. V předchozí větě lze v některých případech předpoklady zeslabit. Např. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, pokud f má v bodě a derivaci a g je v bodě a diferencovatelná.

Věta 4.5.10. *Nechť g je diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$ a nechť $a \in D'_{f\circ g}$. Pak složená funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a, přičemž platí*

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big).g'(a).$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$G(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} & \text{pro} \quad y \neq g(a)\ , \\ \\ f'(g(a)) & \text{pro} \quad y = g(a)\ . \end{cases}$$

Funkci G jsme definovali tak, aby byla spojitá v bodě $g(a)$. Z věty o limitě složené funkce dostaneme

$$\lim_{x\mapsto a} G\big(g(x)\big) = \lim_{y\mapsto g(a)} G(y) = f'\big(g(a)\big)\ . \tag{4.15}$$

Zde $\lim_a g = g(a)$ plyne z diferencovatelnosti funkce g v bodě a. Pro výpočet derivace složené funkce si stačí teď uvědomit, že pro $x \neq a$ je

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \begin{cases} \frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(a)\right)}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{pro } g(x) \neq g(a), \\ \\ 0 & \text{pro } g(x) = g(a). \end{cases}$$

To lze souhrnně zapsat pro $x \neq a$ jako

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = G\big(g(x)\big).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\ .$$

Provedeme-li na obou stranách poslední rovnosti limitní přechod $x \mapsto a$, dostaneme s užitím 4.15

$$\big(f \circ g\big)'(a) = \lim_{x\mapsto a} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} = f'\big(g(a)\big).g'(a),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad 4.5.11. Protože pro libovolné reálné α a kladné x lze psát $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, můžeme funkci $h(x) = x^\alpha$ interpretovat jako funkci složenou z funkcí $f(y) = e^y$ a $g(x) = \alpha \ln x$. Užitím věty o derivaci složené funkce a příkladů 4.5.2 a 4.5.3 dostaneme

$$h'(a) = e^{\alpha \ln a}\ \alpha\ \frac{1}{a} = a^\alpha\ \alpha\ \frac{1}{a} = \alpha\, a^{\alpha-1} \qquad \text{pro každé } a > 0.$$

Věta 4.5.12. *Nechť f je spojitá a prostá na otevřeném intervalu J a diferencovatelná v bodě $x_0 \in J$, přičemž $f'(x_0) \neq 0$. Pak inverzní funkce $f^{-1}_{/J}$ je diferencovatelná v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$\left(f^{-1}_{/J}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

Důkaz. Použijeme větu o limitě složené funkce, kde jako vnější funkci bereme $\phi(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ a jako vnitřní funkci $\psi(y) = f^{-1}_{/J}(y)$ a limitu počítáme v bodě y_0. O vnější funkci

víme z předpokladu, že
$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
O vnitřní funkci víme z věty o spojitosti inverzní funkce, že
$$\lim_{y\mapsto y_0} f^{-1}_{/J}(y) = f^{-1}_{/J}(y_0) = x_0.$$
Protože je $f^{-1}_{/J}$ prostá, je $f^{-1}_{/J}(y) \neq f^{-1}_{/J}(y_0)$ pro $y \neq y_0$. Jsou tedy splněny všechny předpoklady věty o limitě složené funkce, proto
$$\left(f^{-1}_{/J}\right)'(y_0) = \lim_{y\mapsto y_0} \frac{f^{-1}_{/J}(y)-f^{-1}_{/J}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\mapsto y_0} \frac{f^{-1}_{/J}(y)-x_0}{f\left(f^{-1}_{/J}(y)\right)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$
což jsme chtěli dokázat. Poznamenejme, že při poslední úpravě jsme využili toho, že funkce složená s funkcí k ní inverzní je identita. □

Příklad 4.5.13. Uvažujme funkci $f(x) = \sin x$ a interval $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. V každém bodě $b \in J$ je derivace funkce $f(x)$ nenulová a rovna $f'(b) = \cos b > 0$. Označme $a = \sin b \in (-1, 1)$. Z předchozí věty dostaneme
$$(\arcsin)'(a) = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ .$$
Protože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, dostaneme po zderivovaní, že
$$(\arccos)'(a) = -(\arcsin)'(a) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ .$$

Příklad 4.5.14. Také funkce arctg a arccotg splňují vztah $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, proto stačí najít derivaci jedné z nich. Uvažujme funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ a interval $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. V každém bodě $b \in J$ je derivace funkce $f'(b) = \frac{1}{\cos^2 b} > 0$. Označme $a = \operatorname{tg} b$. Aplikací předchozí věty dostaneme
$$(\operatorname{arctg})'(a) = \cos^2 b = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 b} = \frac{1}{1+a^2}.$$
Použitou rovnost $\cos^2 b = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 b}$ snadno odvodíme:
$$\operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} = \frac{1-\cos^2 b}{\cos^2 b} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 b \cos^2 b = 1-\cos^2 b \quad \Rightarrow \quad (1+\operatorname{tg}^2 b)\cos^2 b = 1\ .$$

Pro přehlednost shrneme derivace elementárních funkcí, které jsme odvodili, nebo které budou odvozeny ve cvičeních, do tabulky.

$f(x)$	$f'(x)$	pro
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$
b^x	$b^x \ln b$	$b > 0,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Teď ukážeme, jak lze derivace použít pro vyšetřování funkce. Zavedeme nejdříve některé pojmy.

Definice 4.5.15. Řekneme, že funkce f má v bodě a

- **lokální maximum**, když $(\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$;
- **lokální minimum**, když $(\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$;
- **ostré lokální maximum**, když $(\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a - \{a\})(f(x) < f(a))$;
- **ostré lokální minimum**, když $(\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a - \{a\})(f(x) > f(a))$.

Lokální maximum a lokální minimum společně nazýváme lokální extrém.

Věta 4.5.16. *Nechť f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo derivace v bodě a neexistuje.*

Důkaz. Kvůli sporu předpokládejme, že derivace $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Nechť např. $f'(a) = \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Z defince limity plyne existence okolí H_a takového, že

$$(\forall x \in H_a - \{a\}) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \right) .$$

Tato nerovnost znamená pro každé x z okolí H_a, že

$$x > a \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(a) \qquad \text{a} \qquad x < a \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a),$$

což je v rozporu s tím, že v bodě a je lokální maximum nebo minimum. □

Tady metody pro vyšetřování funkce na chvíli přerušíme a budeme se věnovat velice důležitým větám o přírůstku funkce. Ty nám pak pomohou mimo jiné dokázat věty o vlivu derivace na monotonii funkce.

4.6 Věty o přírůstku funkce

Věta 4.6.1. (Rolleova věta) *Nechť funkce f splňuje:*

1) f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;

2) f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);

3) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Protože funkce spojitá na uzavřeném intervalu je omezená, jsou $\sup f, \inf f \in \mathbb{R}$. Když $\sup f = \inf f$, je funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ konstantní a její derivace je rovna 0 ve všech bodech. Proto jako c lze vzít libovolné $c \in (a, b)$.

Uvažujme případ $\inf f < \sup f$. Protože funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá svého infima a suprema, a protože $f(b) = f(a)$, musí suprema nebo infima nabývat uvnitř intervalu (a, b). Označme tento bod c. Protože v bodě c je lokální extrém, je podle předchozí věty $f'(c) = 0$. □

Poznámka. Pomocí Rolleovy věty lze dokázat její různé modifikace pro neomezené intervaly. Vhodně však musíme upravit předpoklady. Např. platí věta: *Nechť f je spojitá na $\langle a, +\infty)$, nechť pro každé $x \in (a, +\infty)$ existuje $f'(x)$ a nechť $f(a) = \lim_{+\infty} f$. Pak existuje $c \in (a, +\infty)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Abychom takovou větu dokázali, stačí definovat funkci

$$g(x) = \begin{cases} f(\operatorname{tg} x + a) & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}), \\ \lim_{+\infty} f & \text{pro} \quad x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Funkce g je spojitá na intervalu $J = \langle 0, \pi/2\rangle$, uvnitř J má derivaci

$$g'(x) = f'(\operatorname{tg} x + a).\frac{1}{\cos^2 x}$$

a navíc $g(0) = g(\pi/2)$. Podle Rolleovy věty existuje $d \in (0, \pi/2)$ takové, že $0 = g'(d) = f'(\operatorname{tg} d + a).\frac{1}{\cos^2 d}$, což znamená, že $f'(\operatorname{tg} d + a) = 0$. Proto stačí položit $c = \operatorname{tg} d + a$.

Věta 4.6.2. (Lagrangeova věta, tzv. věta o přírůstku funkce) *Nechť funkce f splňuje:*

1) f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;

2) f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Důkaz. Definujme funkci $G(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$ a navíc $G(a) = G(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = G'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ,$$

z čehož už plyne tvrzení věty. □

Věta 4.6.3. (Cauchyova věta, tzv. zobecněná věta o přírůstku funkce) *Nechť funkce f a g splňují:*

1) *f a g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$;*
2) *v každém bodě x intervalu (a, b) existuje $f'(x)$;*
3) *v každém bodě x intervalu (a, b) existuje $g'(x) \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \ .$$

Důkaz. Definujme funkci

$$F(x) := \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Opět je funkce F spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci ve všech $x \in (a, b)$ a $F(a) = F(b) = 0$. Podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = F'(c) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) \ ,$$

tj. $f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)$. Nyní stačí vydělit tuto rovnost čísly $g'(c)$ a $\big(g(b) - g(a)\big)$ a dostaneme tvrzení věty. Samozřejmě dělit se nesmí nulou, číslo $g'(c)$ je nenulové přímo podle předpokladu 3. Kdyby $\big(g(b) - g(a)\big) = 0$, pak z Rolleovy věty by v nějakém bodě d byla derivace $g'(d)$ rovna 0, což by bylo v rozporu s předpokladem věty. □

Poznámka. Lagrangeovu větu získáme z Cauchyovy věty, když za funkci g vezmeme $g(x) = x$. Rolleova věta je zase speciálním případem Lagrangeovy věty.

Na závěr odstavce ukážeme jednu z aplikací Lagrangeovy věty o přírůstku funkce.

Věta 4.6.4. (Darbouxova věta) *Nechť pro funkci f a bod $b \in D_f$ platí:*

1) *f je spojitá v bodě b zprava;*
2) *existuje $\varepsilon > 0$ takové, že funkce f je diferencovatelná v každém bodě $x \in (b, b+\varepsilon)$;*

3) *existuje* $\lim_{b_+} f'$.

Pak funkce f *má v bodě* b *derivaci zprava a platí*

$$f'_+(b) = \lim_{x \mapsto b_+} f'(x).$$

Důkaz. Zvolíme bod $x \in (b, b+\varepsilon)$ a použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce na interval $\langle b, x\rangle$. Podle této věty existuje bod $c = c(x) \in (b, x)$ takový, že

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'\big(c(x)\big). \tag{4.16}$$

Bod c je závislý samozřejmě na volbě x, zápisem $c = c(x)$ vyjadřujeme tuto závislost. Je důležité si uvědomit, že vlastnost $c(x) \in (b, x)$ implikuje $\lim_{b_+} c(x) = b$ a $c(x) \neq b$ pro každé $x \in (b, b+\varepsilon)$. To nám umožní spolu s předpokladem *3)* použít větu o limitě složené funkce. Z ní plyne, že $\lim_{b_+} f'\big(c(x)\big)$ existuje a platí

$$\lim_{b_+} f'(x) = \lim_{b_+} f'\big(c(x)\big). \tag{4.17}$$

Poznamenejme, že pro větu o limitě složené funkce jsme dosazovali za vnější funkci f' a za vnitřní funkci c. Kombinace 4.16 a 4.17 už dává naši větu. $\square$

Poznámka. Obdobné tvrzení lze vyslovit pro derivaci zleva, a tedy i pro derivaci oboustrannou.

Příklad 4.6.5. Nechť $f(x) = \arcsin x$. Tato funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru $D_f = \langle -1, 1\rangle$. Již jsme odvodili, že pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Z Darbouxovy věty plyne

$$f'(-1) = f'_+(-1) = \lim_{x \mapsto -1_+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty = \lim_{x \mapsto 1_-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f'_-(1) = f'(1).$$

Příklad 4.6.6. Tento příklad demonstruje, jak je předpoklad spojitosti funkce f v bodě b důležitý. Uvažujme funkci $f(x) = sgn\, x$ a bod $b = 0$, ve kterém tato funkce není spojitá. Jelikož $f'(x) = 0$ pro každé $x \neq 0$, je $\lim_0 f'(x) = 0$. Ale $f'(0) = +\infty$, viz příklad 4.5.4.

Příklad 4.6.7. Ještě se podívejme na funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{když } x \neq 0; \\ 0, & \text{když } x = 0. \end{cases}$$

Jelikož $\lim_0 f = 0$, je funkce f spojitá v bodě 0. Její derivace kromě bodu 0 je rovna

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\ .$$

Je však zřejmé, že $\lim_0 f'(x)$ neexistuje. Darbouxovu větu tedy nelze použít. To však nebrání tomu, aby existovala derivace $f'(0)$. Spočítáme ji z definice:

$$f'(0) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0.$$

4.7 Užití derivace k vyšetřování funkce

Pomocí Lagrangeovy věty odvodíme tři důležitá tvrzení. První z nich dává do souvislosti znaménko derivace a monotonii funkce.

Úmluva: Pro interval J označíme $J^0 = J - \{\sup J, \inf J\}$, tj. J^0 je interval tvořený vnitřními body intervalu J.

Věta 4.7.1. *Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^0$ existuje $f'(x)$.*

- $(\forall x \in J^0)(f'(x) \geq 0) \iff$ *f je rostoucí na J;*
- $(\forall x \in J^0)(f'(x) \leq 0) \iff$ *f je klesající na J;*
- $(\forall x \in J^0)(f'(x) > 0) \implies$ *f je ostře rostoucí na J;*
- $(\forall x \in J^0)(f'(x) < 0) \implies$ *f je ostře klesající na J;*
- $(\forall x \in J^0)(f'(x) = 0) \iff$ *f je konstantní na J.*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení.
$(\Rightarrow)$ Předpokládejme, že derivace je nezáporná ve všech vnitřních bodech intervalu J. Abychom ukázali, že funkce je rostoucí, uvažujme libovolné $y_1, y_2 \in J$, $y_1 < y_2$. Aplikujeme Lagrangeovu větu na funkci f a interval $\langle y_1, y_2 \rangle$. Existuje $c \in (y_1, y_2)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} \geq 0$. Protože jmenovatel $y_2 - y_1$ je kladný, je $f(y_2) - f(y_1) \geq 0$, tj. $f(y_2) \geq f(y_1)$, což jsme chtěli ukázat.
$(\Leftarrow)$ Pro spor předpokládejme, že funkce f je rostoucí na J, a přitom existuje bod $x_0 \in J^0$ takový, že $f'(x_0) < 0$. Pak na jistém okolí H_{x_0} platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \text{pro každé } x \in H_{x_0} - \{x_0\} \; . \tag{4.18}$$

Zvolme $x \in H_{x_0}, x > x_0$. Pak z 4.18 plyne $f(x) - f(x_0) < 0$, a to je v rozporu s tím, že f je rostoucí.

$\square$

Poznámka. Ve větě 4.7.1 jsme pouze první, druhé a páté tvrzení vyslovili ve tvaru ekvivalence. Poznamenejme, že další dvě tvrzení vyslovit ve tvaru ekvivalence nelze, jak dokládá následující příklad: funkce $f(x) = x^3$ je ostře rostoucí na celém $\mathbb{R}$, avšak její derivace není kladná na celém $\mathbb{R}$, protože $f'(0) = 0$.

Poznámka. Bodům $x \in D_f$, ve kterých je f diferencovatelná, je přiřazené reálné číslo $f'(x)$. Toto přiřazení je samo o sobě reálnou funkcí reálné proměnné, kterou značíme f' a nazýváme derivace funkce f. Pro tuto funkci má opět smysl zkoumat, ve kterých bodech je diferencovatelná. Derivaci $(f')'$ funkce f' nazýváme druhá derivace funkce f a běžněji značíme f''. Opakovaným postupem lze definovat n-tou derivaci funkce f, kterou ještě pro $n = 3$ značíme f''', ale pro vyšší n používáme značení $f^{(n)}$. Kvůli zjednodušení zápisu se často hodí ztotožnit funkci f a $f^{(0)}$.

Poznámka. Je zajímavé zmínit, že binomické koeficienty si zahrají ve vzorci (zvaném Leibnizův) pro výpočet n-té derivace součinu dvou funkcí:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \ .$$

Důkaz matematickou indukcí je jednoduchou aplikací pravidla pro derivování součinu a přenecháme jej čtenáři.

Další aplikace Lagrangeovy věty se týká vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce. Pro čtenáře znalého pojmu konvexní množina lze zavést tyto pojmy takto:

Funkce f je konvexní na intervalu J, když množina $\{(x,y) \,|\, x \in J, y \geq f(x)\}$ je konvexní.

Funkce f je konkávní na intervalu J, když funkce $-f$ je konvexní na J.

Abychom se nemuseli odvolávat na možná neznámý pojem konvexní množina, definujeme konvexnost a konkávnost pomocí nerovností.

Definice 4.7.2. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť interval J je částí definičního oboru D_f.

1) Řekneme, že f je **konvexní na intervalu** J, když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

2) Řekneme, že f je **konkávní na intervalu** J, když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

3) Řekneme, že f je **ostře konvexní na intervalu** J, když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

4) Řekneme, že f je **ostře konkávní na intervalu** J, když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

Poznámka. Nerovnost

$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \tag{4.19}$$

v definici konvexní funkce lze geometricky interpretovat: Přímka procházející dvěma body grafu funkce, a to body $\big(x_1, f(x_1)\big)$ a $\big(x_3, f(x_3)\big)$, má rovnici

$$y = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x - x_1) + f(x_1).$$

Nerovnost 4.19 tedy říká, že bod grafu funkce $\big(x_2, f(x_2)\big)$ leží pod úsečkou spojující body $\big(x_1, f(x_1)\big)$ a $\big(x_3, f(x_3)\big)$ nebo na ní.

Poznámka. Pro body $x_1 < x_2 < x_3$ lze nerovnost 4.19 ekvivalentně přepsat dvěma dalšími způsoby:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \tag{4.20}$$

nebo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,. \tag{4.21}$$

Libovolnou z těchto nerovností lze proto použít pro definici konvexnosti funkce.

Poznámka. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, nazýváme přímku o rovnici

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

tečnou funkce f v bodě a. Zmíníme teď zajímavou souvislost tečny a konvexnosti: Nechť f je ostře konvexní na intervalu J a nechť f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in J$. Pak graf funkce $f_{/J}$ leží nad tečnou funkce f v bodě x_0, tj.

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{pro každé } x \in J - \{x_0\}\ .$$

Věta 4.7.3. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^0$ existuje $f'(x) \in \mathbb{R}$.*

- *Je-li funkce f' rostoucí na J^0, pak je funkce f konvexní na J.*
- *Je-li funkce f' klesající na J^0, pak je funkce f konkávní na J.*
- *Je-li funkce f' ostře rostoucí na J^0, pak je funkce f ostře konvexní na J.*
- *Je-li funkce f' ostře klesající na J^0, pak je funkce f ostře konkávní na J.*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení. Uvažujme tři libovolné body z intervalu J, body $x_1 < x_2 < x_3$. Využijeme opět Lagrangeovu větu, tentokráte pro uzavřené intervaly $\langle x_1, x_2\rangle$ a $\langle x_2, x_3\rangle$. Existují tedy body $c_1 \in (x_1, x_2)$ a $c_2 \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{a} \quad f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Protože $c_1 < x_2 < c_2$ a funkce f' je rostoucí na J^0, dostaneme

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2).$$

Dostali jsme tak nerovnost 4.21, která již implikuje konvexnost funkce.
Zbylá tvrzení se dokazují analogicky. □

K tomu, aby funkce f' byla monotonní, jak to vyžaduje předpoklad předchozí věty, stačí, aby její derivace, tedy f'', neměnila znaménko na J^0.

Důsledek 4.7.4. *Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^0$ existuje $f''(x)$.*

- *Je-li $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^0$, pak f je konvexní na J.*
- *Je-li $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in J^0$, pak f je konkávní na J.*
- *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in J^0$, pak f je ostře konvexní na J.*
- *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in J^0$, pak f je ostře konkávní na J.*

Otázkou je, jak nutné pro konvexnost, resp. konkávnost funkce jsou předpoklady věty 4.7.3, tj. diferencovatelnost funkce a monotonie derivace. Na to dává odpověď další věta.

Věta 4.7.5. *Nechť funkce f je konvexní nebo konkávní na intervalu J. Pak pro každé $a \in J^0$ platí, že existují $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$. Navíc je-li f konvexní, jsou funkce $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ na J^0 rostoucí; je-li f konkávní, jsou funkce $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ na J^0 klesající.*

Důkaz. Protože pro libovolnou funkci g platí, že g je konvexní na J, právě když $-g$ je konkávní na J, stačí větu dokázat pouze pro konvexní funkce.

K danému bodu $a \in J^0$ najdeme pevně $K \in J^0$ tak, aby $K < a$. Uvažujme dva libovolné body $x, y \in J$, $a < x < y$. Protože funkce f je konvexní na J, platí nerovnost 4.20 i pro trojici bodů $a < x < y$, tj.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}\ .$$

To ale implikuje, že funkce

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

je na intervalu $J \cap (a, +\infty)$ rostoucí. Z věty 4.2.19 a jejího důkazu plyne, že existuje

$$\lim_{a+} F(x) = \inf \{F(x) \ \mid \ x \in J \cap (a, +\infty)\} \ .$$

Aplikujme teď nerovnost 4.21 na trojici bodů $K < a < x$. Dostaneme

$$\frac{f(a) - f(K)}{a - K} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

To znamená, že funkce $F(x)$ je omezená zdola konstantou $\frac{f(a)-f(K)}{a-K}$, a tedy limita $\lim_{a+} F(x)$ je konečná. Z definice derivace proto máme

$$f'_+(a) = \lim_{a+} F(x) \in \mathbb{R}.$$

Abychom dokázali, že funkce $f'_+(x)$ je rostoucí na J^0, uvažujme $a, b \in J^0$, $a < b$. Zvolme libovolně $x, y \in J$ tak, aby $a < x < b < y$. Použitím nerovnosti 4.20 na body $a < x < b$ a nerovnosti 4.21 na body $a < b < y$ dostaneme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \ .$$

Protože předchozí vztah platí pro libovolné $y > b, y \in J$, je

$$f'_+(b) = \inf \left\{ \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \ \mid \ y \in J, y > b \right\} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Na druhé straně

$$f'_+(a) = \inf \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ \mid \ x \in J, x > a \right\} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Celkově tedy

$$f'_+(a) \leq f'_+(b) \quad \text{pro každé} \quad a, b \in J^0, \ a < b \ .$$

Důkaz existence derivace zleva a její monotonie je analogický. □

Důsledek 4.7.6. *Funkce konvexní, resp. konkávní na intervalu J je spojitá v každém bodě $a \in J^0$.*

Důkaz. Podle věty 4.7.5 v každém bodě $a \in J$ existují konečné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. To zaručuje spojitost f v bodě a zprava i zleva, viz 4.5.6. Tedy f je v bodě a spojitá. □

Poznámka. Konvexnost ani konkávnost funkce na J nezaručuje existenci $f'(a)$. Např. funkce $f(x) = |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$, v bodě 0 však f nemá derivaci.
Spojitost funkce konvexní nebo konkávní na J je zaručena pouze uvnitř intervalu. Např. funkce $f(x) = x - [x]$ je konkávní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, není však v bodě 1 spojitá.

Poznámka. Nechť funkce f je konvexní na intervalu J. Snadno se ukáže, že

$$f'_-(a) \le f'_+(a) \le f'_-(b) \quad \text{pro každé } a, b \in J^0, a < b \ .$$

Z monotonie funkce $f'_-(x)$ proto plyne, že

$$f'_-(a) \le f'_+(a) \le \lim_{a+} f'_- \quad \text{pro každé } a \in J^0 \ . \tag{4.22}$$

Z poznámky za příkladem 4.4.9 plyne, že funkce f'_- má na intervalu J nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti. Označme ji M. Spojitost funkce f'_- ovšem znamená, že platí

$$f'_-(a) = \lim_{a+} f'_- \quad \text{pro } a \in J - M \ .$$

To spolu s nerovností 4.22 již implikuje, že

$$f'_-(a) = f'_+(a) \quad \text{pro } a \in J - M \ ,$$

a tedy existenci derivace funkce f v bodě a. Celkově lze říct:

Funkce konvexní na intervalu J je diferencovatelná v každém bodě J až na spočetně mnoho výjimek.

Poznámka. Předpokládejme, že f je funkce konvexní na intervalu J. Zvolme libovolně dva různé body $x, y \in J$ a mezi nimi ležící průměr $\frac{x+y}{2}$. Dosadíme-li do definice konvexnosti za $x_1 := x < x_2 := \frac{x+y}{2} < x_3 := y$, dostaneme

$$\Big(\forall\ x, y \in J,\ x \neq y\Big) \left(f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x) + f(y)}{2} \right), \tag{4.23}$$

což znamená, že **pro konvexní funkci** platí:

"Funkční hodnota průměru je menší nebo rovna průměru funkčních hodnot."

Pro konkávní funkci lze podobně odvodit, že

"Funkční hodnota průměru je větší nebo rovna průměru funkčních hodnot."

Aplikujme tyto nerovnosti na konkrétní funkce. Poznamenejme, že pro ostře konvexní, resp. ostře konkávní funkce dostaneme ostré nerovnosti.

Jelikož funkce e^x má druhou derivaci e^x, která je kladná pro všechna x, je funkce e^x ostře konvexní. Nerovnost

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

proto platí pro libovolná reálná čísla $x \neq y$.

Funkce $\ln x$ má druhou derivaci $-\frac{1}{x^2}$ zápornou pro každé kladné x, proto je funkce $\ln x$

ostře konkávní. Pro $x, y > 0, x \neq y$ tedy máme

$$\ln \frac{x+y}{2} > \frac{\ln x + \ln y}{2} \ .$$

Poznámka. Z toho, že je f konvexní, jsme odvodili vlastnost 4.23. Je velice zajímavé, že lze dokázat i obrácenou implikaci, totiž že každá spojitá funkce f, která vyhovuje 4.23, je už nutně na intervalu J konvexní.

Následující definice nám umožní zpřesnit představu o grafu funkce.

Definice 4.7.7. (definice asymptoty)

1) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a \in D'_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **asymptotu** $x = a$, když $\lim_{a_+} f$ nebo $\lim_{a_-} f$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

2) Nechť $+\infty \in D'_f$, resp. $-\infty \in D'_f$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \big(f(x) - (kx+q)\big) = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} \big(f(x) - (kx+q)\big) = 0.$$

Zkoumejme, jaké vlastnosti musí mít k a q, aby přímka $y = kx + q$ byla asymptotou v $+\infty$.
Z definice asymptoty plyne, že

$$0 = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) \quad \Rightarrow \quad k = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} \ .$$

Tedy existence konečné limity $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ je nutnou podmínkou existence asymptoty. Majíce k, dostaneme opět z definice asymptoty podmínku na q:

$$q = \lim_{x \mapsto +\infty} \big(f(x) - kx\big) \in \mathbb{R}.$$

Na druhé straně, existují-li limity

$$k = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \mapsto +\infty} \big(f(x) - kx\big) \in \mathbb{R},$$

pak zřejmě přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$. Podobný závěr lze vyslovit pro asymptotu funkce v $-\infty$.

Poznámka. U asymptoty $y = kx + q$ v $+\infty$ nebo v $-\infty$ se můžeme ptát, z jaké strany se funkce f k této přímce přibližuje. To můžeme vyčíst z konvexnosti, resp. konkávnosti funkce na okolí příslušného nekonečna, jak to dokazuje následující tvrzení:

Nechť funkce f je konvexní na intervalu $\langle a, +\infty)$ a nechť přímka $y = kx+q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$. Pak

- *buď* $f(x) > kx + q$ *pro každé* $x \in \langle a, +\infty)$,
- *nebo existuje* $a_0 > a$ *tak, že* $f(x) = kx + q$ *pro každé* $x > a_0$.

Nejdříve ukážeme, že předpoklad konvexnosti a existence asymptoty zaručují, že

$$\text{pro každé } x_1 > x_0 > a \text{ je } \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq k. \tag{4.24}$$

Ukážeme to sporem. Nechť pro nějaké $x_1 > x_0$ platí

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > k.$$

Jelikož

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)/x - f(x_0)/x}{1 - x_0/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

existuje $x_2 > x_1$ takové, že

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

a to je ve sporu s konvexností funkce f.

Teď k samotnému tvrzení. Předpokládejme, že existuje $a_1 > a$ takové, že $f(a_1) < ka_1 + q$. Položme $\varepsilon := ka_1 + q - f(a_1) > 0$. Protože

$$\lim_{x \to +\infty} \big(kx + q - f(x)\big) = 0,$$

existuje $a_2 > a_1$ takové, že

$$ka_2 + q - f(a_2) < \varepsilon = ka_1 + q - f(a_1)\ .$$

Úpravou dostaneme $k < \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}$, což je ve sporu s 4.24. Odvodili jsme tedy, že pro každé $x > a$ platí

$$f(x) \geq kx + q.$$

Dále předpokládejme, že existuje $b_1 > a$ takové, že $f(b_1) = kb_1 + q$ a nechť existuje $b_2 > b_1$, že $f(b_2) > kb_2 + q$. To ale znamená $f(b_2) - kb_2 - q > 0 = f(b_1) - kb_1 - q$. Po úpravě $k < \frac{f(b_2) - f(b_1)}{b_2 - b_1}$, a to je opět spor s 4.24. Tedy jakmile se jednou graf funkce f dotkne asymptoty v bodě b_1, leží na asymptotě každý další bod $(b, f(b))$ grafu funkce pro $b > b_1$. Tím je celé tvrzení dokázáno.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, sudost, lichost, periodicitu;

2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot;

3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy;

4. existenci f'', konvexnost a konkávnost.

Pomocí získaných výsledků pak načrtneme graf funkce (pokud je funkce f "rozumná").

Příklad 4.7.8. Vyšetřeme funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}.$$

1. Třetí odmocninu lze počítat z libovolného reálného čísla, proto je $D_f = \mathbb{R}$.
$x = 0$ implikuje $f(x) = 0$, $f(x) = 0$ implikuje $x = 0$ nebo $x = 3$. Průsečíky s osami jsou proto body $(0, 0)$ a $(3, 0)$.

Průsečíky s osami vylučují sudost, lichost i periodičnost funkce.

2. Funkce f je zřejmě spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. Jelikož $\pm\infty \in D'_f$, má smysl zkoumat asymptoty f v obou nekonečnech.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}} = -1\ ,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1\ .$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ a zároveň v $-\infty$.

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} (3x^2 - x^3)^{-2/3}(2x - x^2) & \text{pro} \quad x \neq 0, 3, \\ -\infty & \text{pro} \quad x = 3, \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Poznamenejme, že jednostranné derivace funkce f v bodech 0 a 3 lze spočítat pomocí Darbouxovy věty. Oboustranná derivace v bodě 0 neexistuje, protože

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f'(x) = -\infty \quad \text{a} \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x) = +\infty.$$

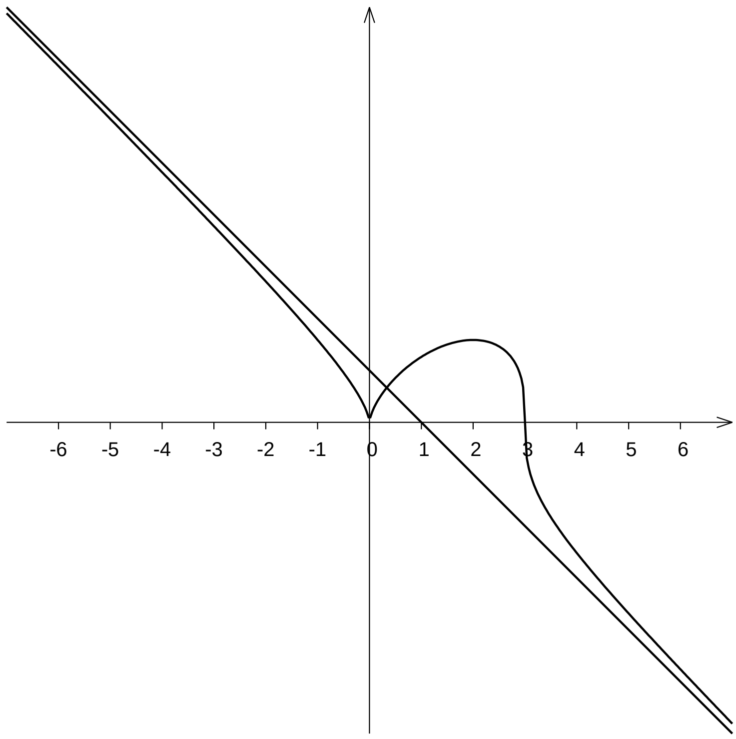
Kandidáti pro lokální extrém funkce jsou tedy body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace rovná 0). Jedná-li se skutečně o extrém, zjistíme z chování funkce f v okolí těchto bodů. Snadno vyšetříme znaménko f', a tedy typy monotonie:
pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) < 0$, proto f je ostře klesající na $x \in (-\infty, 0\rangle$,
pro $x \in (0, 2)$ je $f'(x) > 0$, proto f je ostře rostoucí na $x \in \langle 0, 2\rangle$,
pro $x \in (2, +\infty)$ je $f'(x) < 0$, tedy f je ostře klesající na $x \in \langle 2, +\infty)$.
Bod 0 je bodem lokálního minima, v bodě 2 je lokální maximum. O globálních extrémech nemá smyslu mluvit, protože $\lim_{\pm\infty} f = \mp\infty$, což spolu se spojitostí funkce f na $\mathbb{R}$

znamená, že obor hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

4. Druhou derivaci má smysl počítat pouze v bodech, kde $f'(x)$ existuje a je konečná, tj. v bodech $x \neq 0, 3$. Pro tyto body platí

$$f''(x) = -\frac{2}{3-x}(3x^2 - x^3)^{-2/3} \, .$$

Zkoumáním znaménka $f''(x)$ dostaneme:
pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f''(x) < 0$, proto je f konkávní na $(-\infty, 0\rangle$,
pro $x \in (0, 3)$ je $f''(x) < 0$, proto je f konkávní na $\langle 0, 3\rangle$,
pro $x \in (3, +\infty)$ je $f''(x) > 0$, proto je f konvexní na $\langle 3, +\infty)$.
Z poznámky za definicí asymptoty můžeme pro znázornění grafu funkce říct, že graf funkce se pro dostatečně velká x blíží k přímce $y = -x + 1$ shora a pro $x \to -\infty$ se graf funkce f blíží ke stejné přímce zdola. Graf funkce je znázorněný na následujícím obrázku.



4.8 L'Hospitalovo pravidlo

V této kapitole vyslovíme a dokážeme další známé pravidlo pro výpočet limit.[2] Důkaz je opět aplikací věty o přírůstku funkce.

[2]Roku 1696 se objevila prvá učebnice diferenciálního a integrálního počtu *Analyse des infiniment petits* markýze de l'Hospitala. Kniha už obsahovala toto pravidlo.

Věta 4.8.1. *Nechť pro funkce f a g a bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$ platí*

1) $\lim_b f = \lim_b g = 0$ *nebo* $\lim_b |g| = +\infty$*;*

2) $(\exists H_b)\big(H_b - \{b\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}\big)$*;*

3) existuje $\lim_b \frac{f'}{g'}$*.*

Pak existuje $\lim_b \frac{f}{g}$ *a platí* $\lim_b \frac{f}{g} = \lim_b \frac{f'}{g'}$*.*

Poznámka. Obdobné tvrzení platí pro $\lim_{b_+} \frac{f}{g}$ a $\lim_{b_-} \frac{f}{g}$ za předpokladů příslušně upravených pro pravé, resp. levé okolí bodu b.

Důkaz. Nejdříve uvažujeme $b \in \mathbb{R}$. Důkaz provedeme pro pravostranné limity, pro levostranné limity je důkaz analogický.

A Důkaz je velice jednoduchý, když z podmínky *1)* platí první část, tedy ve verzi pro pravostranné limity $\lim_{b_+} f = \lim_{b_+} g = 0$.
Dodefinujme, popřípadě předefinujme funkce f a g v bodě b tak, aby byly v tomto bodě spojité, tj. položme $f(b) := 0$ a $g(b) := 0$. Předpoklad *2)* říká , že funkce f a g jsou diferencovatelné na jistém pravém okolí $(b, b+\delta)$ bodu b a navíc $g'(x) \neq 0$ pro každé x v tomto okolí. Z toho plyne, že f a g jsou spojité na $\langle b, b+\delta)$.

Nyní uvažujme libovolné $x \in (b, b+\delta)$ a aplikujme Cauchyovu větu o přírůstku funkce na interval $\langle b, x\rangle$. Dostaneme existenci bodu $c = c(x)$, pro nějž je $b < c(x) < x$ a navíc

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f(x)}{g(x)} \ . \tag{4.25}$$

Z věty o limitě sevřené funkce plyne, že $\lim_{b_+} c(x) = b$. Z věty o limitě složené funkce a z předpokladu *3)* dostaneme

$$\lim_{x \mapsto b_+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \mapsto b_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

což spolu s 4.25 už dává tvrzení věty.

B Diskutujme teď případ, kdy z předpokladu *1)* je splněno $\lim_{b_+} |g| = +\infty$.
Uvědomme si, že předpoklad *2)* implikuje, že funkce g je na jistém pravém okolí $(b, b+\delta)$ prostá. Kdyby totiž pro nějaké různé body $x_1, x_2 \in (b, b+\delta)$ platilo $g(x_1) = g(x_2)$, existoval by podle Rolleovy věty bod $z \in (b, b+\delta)$ tak, že $g'(z) = 0$, což by byl spor s *2)*.

Protože funkce g je prostá a spojitá na $(b, b+\delta)$, je g ryze monotonní na $(b, b+\delta)$. Monotonie ovšem vynucuje existenci $\lim_b g$. Z druhé části předpokladu *1)* dostaneme $\lim_{b_+} g = +\infty$ nebo $\lim_{b_+} g = -\infty$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\lim_{b_+} g = +\infty$. V tomto případě musí být g klesající na $(b, b+\delta)$.

Vezměme libovolnou posloupnost (x_n) takovou, že
– pro každý index $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in (b, b+\delta)$;

– posloupnost (x_n) je ostře klesající a $\lim x_n = b$.

Aplikujeme Cauchyovu větu o přírůstku funkce postupně na intervaly $\langle x_{n+1}, x_n\rangle$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje $y_n \in (x_{n+1}, x_n)$ tak, že

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} \ .$$

Protože $\lim y_n = b$, dostaneme z Heineovy věty a předpokladu *3)*

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \lim_{x \mapsto b_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ . \tag{4.26}$$

Jelikož g je klesající na $(b, b+\delta)$ s limitou $\lim_{b_+} g = +\infty$, je posloupnost $\big(g(x_n)\big)$ ostře rostoucí s limitou $+\infty$. Lze tedy použít Stolzovu větu. Z ní a ze vztahu 4.26 dostaneme

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \mapsto b_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{pro každou posloupnost } (x_n) \text{ ostře klesající k } b.$$

Kdyby posledně napsané tvrzení platilo pro libovolnou posloupnost (x_n) blížící se k b, byli bychom podle Heineovy věty s důkazem hotovi. My jsme ovšem uvažovali pouze klesající posloupnosti (x_n). Proto nám Heineova věta říká pouze to, že pokud by $\lim_{b_+} \frac{f}{g}$ existovala, musela by být rovna $\lim_{b_+} \frac{f'}{g'}$.

Předpokládejme pro spor, že $\lim_{b_+} \frac{f}{g}$ neexistuje. Podle Heineovy věty existuje posloupnost (z_n) taková, že $z_n \mapsto b$, $z_n \in (b, b+\delta)$ a

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \beta \neq \lim_{b_+} \frac{f'}{g'} \ .$$

Vybereme z posloupnosti (z_n) ostře klesající posloupnost (z_{k_n}) takto: $k_1 := 1$, a pro přirozené $n \geq 2$ klademe

$$k_n := \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_{n-1} \ \text{ a } \ z_k < z_{k_{n-1}}\} \ .$$

Máme tedy klesající posloupnost (z_{k_n}), která má za limitu b a přitom $\lim \frac{f(z_{k_n})}{g(z_{k_n})}$ je rovna $\beta \neq \lim_{b_+} \frac{f'}{g'}$, což je ve sporu s tím, co jsme pro klesající posloupnosti ukázali.

Zbývá dokázat l'Hospitalovo pravidlo pro případ, kdy $b \in \overline{\mathbb{R}} - \mathbb{R}$. Uvažujme $b = +\infty$ (případ $b = -\infty$ je analogický). Předpoklad *3)*, věta o limitě složené funkce a už dokázaná část l'Hospitalova pravidla zaručují existenci následujících limit a rovnosti mezi nimi:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y \mapsto 0_+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \mapsto 0_+} \frac{\left(-\frac{1}{y^2}\right) f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(-\frac{1}{y^2}\right) g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \mapsto 0_+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ .$$

Využili jsme toho, že derivace funkce $f(1/y)$ je rovna $-\frac{1}{y^2}f'(1/y)$ a obdobně pro funkci g. $\square$

Poznámka. Variantou důkazu, který jsme uvedli, jsme chtěli zdůraznit souvislost l'Hospitalova pravidla a Stolzovy věty. Jiný důkaz l'Hospitalova pravidla bez použití Stolzovy věty lze najít např. v [4], [3].

Příklad 4.8.2. Počítejme limitu

$$\lim_{x\mapsto 0_+} x\ln x \ .$$

Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, musíme nejdříve ze součinu vytvořit podíl, a pak derivovat.

$$\lim_{x\mapsto 0_+} x\ln x = \lim_{x\mapsto 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\mapsto 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\mapsto 0_+} (-x) = 0 \ .$$

Příklad 4.8.3. Pro každé $p \in \mathbb{R}$ ukážeme, že

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ .$$

Když $p \le 0$, pak rovnou vidíme, že limita je $+\infty$.
Pro $p \in (0,1\rangle$ dostaneme z l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^p} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{px^{p-1}} \ .$$

Druhá limita má už exponent u x menší nebo roven 0, a převedli jsme tak výpočet limity na předchozí případ. Limita je tedy $+\infty$.
Pro libovolné kladné p lze postupně aplikovat l'Hospitalovo pravidlo (p krát v případě, že $p \in \mathbb{N}$ a $[p]+1$ krát, když $p \notin \mathbb{N}$), až poslední limita bude triviálně rovna $+\infty$.

Následující dva příklady ukazují, že l'Hospitalovo pravidlo není univerzální návod na výpočet limit.

Příklad 4.8.4. Spočítejme limitu

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

nejdříve jednoduchým zůsobem: z limity typu $\frac{\infty}{\infty}$ získáme vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem e^{-x} určitý výraz

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1 \ .$$

Chceme-li však použít na výpočet limity l'Hospitalovo pravidlo, budmeme muset spočítat limitu podílu derivací

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ .$$

Jedná se o limitu převrácené hodnoty stejné funkce. Je proto jasné, že zde nemá smysl l'Hospitalovo pravidlo použít.

Příklad 4.8.5. Rovněž limitu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

lze získat přímo po jednoduché úpravě

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1 \ .$$

I když původní limita je typu $\frac{+\infty}{+\infty}$, nelze na její výpočet použít l'Hospitalovo pravidlo: podíl derivací

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

nesplňuje předpoklad *2)* l'Hospitalova pravidla, ani neexistuje

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \ .$$

Literatura

[1] ALIPRANTIS CH.D., BURKINSHAW O.: *Principles of real analysis*, Academic press 1998.

[2] COURANT R., JOHN F.: *Introduction to Calculus and analysis*, Springer-Verlag Berlin, 1999.

[3] FICHTĚNGOL'C G.M.: *Kurz diferencial'nogo i integral'nogo isčislěnia*, Gosudarstvenoje Izdatěl'stvo Techniko-Teoretičeskoj Literatury, Moskva, 1951.

[4] JARNÍK V.: *Úvod do počtu diferenciálního*, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[5] JARNÍK V.: *Diferenciální počet II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1956.

[6] MATOUŠEK J., NEŠETŘIL J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.

[7] SVOBODA L.: *Encyklopedie antiky*, Academia, 1973.

[8] VESELÝ J.: *Komplexní analýza*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.