Poznámky k přednáškám z matematické analýzy LS2024 (pouze části odlišné od skript)

Edita Pelantova

Březen 2024

Kapitola 1

Číselné řady

1.1 Základní pojmy

Tato kapitola je věnována limitám číselných posloupností, jejichž n-tý člen vznikl součtem prvních n členu jiné posloupnosti. S limitami takových posloupností jsme se už setkali a známe

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1\ ,\qquad \lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e\quad \text{a}\quad \lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2\,.$$

Podobné limity hrají v matematice významnou roli. V kapitole Tayloruv vzorec jsme už měli možnost vidět, jak lze hodnoty známých funkcí vyjádřit jako limity posloupností tohoto typu. Pro každé $x\in\mathbb{R}$ například platilo $\sin x=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1}$, atd.

Definice 1.1. Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejich **částečných součtu** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definujeme vztahem

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n\quad\text{pro každé}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Dvojici posloupností $\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ pak nazýváme **číselnou řadou** a značíme ji symbolem $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, kde a_n nazýváme n-tým **členem** číselné řady. Existuje-li konečná limita

$$s=\lim_{n\mapsto+\infty}s_n,$$

říkáme, že **řada konverguje** a má součet s. V opačném případě říkáme, že **řada diverguje**.

Poznámka 1.2. Uveďme tři komentáře k předchozí definici.

1. Divergentní řady ještě dělíme na **podstatně divergentní**, pro něž $\lim s_n$ existuje, ale není konečná, a na **oscilující**, pro něž $\lim s_n$ neexistuje.

2. Jestliže indexování puvodní číselné posloupnosti (a_n) začíná jiným celým číslem než jedničkou, upravujeme i indexování číselné řady. Např. k posloupnosti $(a_n)_{n\geq 5}$ přiřazujeme řadu $\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$, atd.

3. Pro řadu (tedy dvojici posloupností) i pro její součet (tedy číslo) se vžilo stejné značení $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. My u této zvyklosti zustaneme a budeme zapisovat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Nevinná nedbalost této konvence nejenže nezpusobí žádné zmatky, ale dá nám i možnost psát

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad \text{osciluje}\,.$$

Definice 1.3. Řekneme, že řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ mají **stejný charakter**, když obě současně konvergují, nebo obě současně oscilují, nebo obě jsou současně podstatně divergentní.

Poznámka 1.4. Změníme-li hodnoty a_n pro konečně mnoho indexu n, charakter nové a puvodní řady je stejný. Speciálně, když vynecháme konečný počet členu posloupnosti, máme řadu se stejným charakterem, ale jiným součtem.

Věta 1.5. (nutná podmínka konvergence) *Když řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje, pak*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} a_n = 0\ .$$

Důkaz. Konečnost limity posloupností (s_n) implikuje $0 = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$. □

Příklad 1.6. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ diverguje, protože $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Příklad 1.7. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, i když $\lim \frac{1}{n} = 0$. Tento příklad demonstruje, že podmínka $\lim a_n = 0$ není podmínkou postačující.

Jak už bylo zmíněno v úvodu, řady jsou speciálním případem posloupností. Proto mnoho vět pro řady je okamžitým dusledkem vět platných pro posloupnosti a uvádíme je proto bez dukazu.

Věta 1.8. *Nechť* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *jsou číselné řady.*

- *Když řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konvergují, pak také řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje.*
- *Když řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje a řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje, pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *diverguje.*
- *Nechť* $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. *Pak řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n)$ *mají stejný charakter.*

Věta 1.9. (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence) *Řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big(\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \Big| < \varepsilon \Big).$$

Nejdříve se budeme zabývat chováním řad s kladnými členy. Že právě tyto řady mají duležité postavení mezi řadami, zduvodňuje následující dusledek Bolzanova-Cauchyova kritéria.

Důsledek 1.10. *Konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Důkaz. Konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je podle předchozí věty ekvivalentní tvrzení

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big(\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \Big| < \varepsilon \Big).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \Big| \le \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \Big| < \varepsilon\,.$$

To znamená, že Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence je splněna i pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. $\square$

Definice 1.11. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada.

- Konverguje-li také řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**.
- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**.

1.1.1 Řady s kladnými členy

V této kapitole budeme zkoumat konvergenci řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, u kterých $a_n \ge 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě je posloupnost častečných součtu rostoucí, protože

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy $\lim s_n$ existuje (konečná nebo $+\infty$). To znamená, že **každá řada s kladnými členy je buď konvergentní nebo podstatně divergentní**.

Tři elementární pozorování plynou z věty o nerovnostech v limitách. Nazýváme je **srovnávací kritéria**.

Věta 1.12. *Nechť pro nezáporné posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *platí, že* $a_n \le b_n$ *od jistého indexu* n_0. *Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*

Věta 1.13. *Nechť pro kladné posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *platí, že* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *od jistého indexu* n_0*. Pokud* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. U nerovností $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ s indexy $k = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ vynásobíme levé a pravé strany. Po zkrácení dostaneme

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\, b_n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},\ n > n_0\,.$$

Protože řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\, b_n$ mají stejný charakter, plyne tvrzení dokazované věty z věty 1.12. □

Věta 1.14. *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jsou kladné posloupnosti takové, že existuje*

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\,.$$

- *Pokud* $L < +\infty$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
- *Pokud* $L > 0$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverguje, pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*
- *Pokud* $0 < L < +\infty$*, pak řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *mají stejný charakter.*

Důkaz. Třetí bod věty je přímým dusledkem dvou předchozích bodu a toho, že řady s kladnými členy mohou pouze konvergovat nebo podstatně divergovat. Proto stačí dokázat první dvě tvrzení.

Pokud $L < +\infty$, pak od jistého indexu n_0 platí nerovnost $\frac{a_n}{b_n} < L + 1$. To implikuje $a_n < (L+1)b_n$. Předpoklad konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ vynucuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(L+1)b_n$. Podle věty 1.12 nerovnost $a_n < (L+1)b_n$ dává konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pokud $L > 0$ je konečné, pak od jistého indexu n_0 platí nerovnost $\frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}$ nebo ekvivalentně $a_n > \frac{L}{2}\, b_n$. V případě, že $L = +\infty$, pak od jistého n_0 je $\frac{a_n}{b_n} > 1$ čili $a_n > b_n$. Za předpokladu divergence $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dostaneme aplikací věty 1.12 naše tvrzení. □

Některá populární kritéria pro konvergenci řad s kladnými členy jsou v podstatě jen speciálními případy vět 1.12, 1.13 a 1.14, do kterých je dosazena jedna z následujících řad se známým chováním.

1. $\boxed{\text{Geometrická řada } \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \text{ konverguje právě tehdy, když } |q| < 1\,.}$

   Pro geometrickou řadu je n-tý částečný součet roven $s_n = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ a $s_n = n$ pro $q = 1$. Posloupnost (s_n) má tedy konečnou limitu, a to $\frac{q}{1-q}$, pouze pro $|q| < 1$.

2. $\boxed{\text{Nechť } \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{Řada } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje právě tehdy, když } \alpha > 1\,.}$

Pro $\alpha \leq 1$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Protože harmonická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní, plyne z věty 1.12 divergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Uvažujme $\alpha > 1$. Označme $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$. U řady s kladnými členy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right)$$

snadno určíme n-tý částečný součet a posléze součet celé řady $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \mapsto 1$. Na úpravu n-tého členu této konvergentní řady použijeme Tayloruv vzorec

$$(1+x)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon x + x.\omega(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x \mapsto 0} \omega(x) = 0.$$

Dostaneme

$$a_n := \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{n^\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{n^\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{n}\omega(\tfrac{1}{n})\right) = \frac{\varepsilon - \omega(\frac{1}{n})}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

Označíme-li $b_n = \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, máme $\lim \frac{a_n}{b_n} = \varepsilon > 0$. Z věty 1.14 plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

3. $\boxed{\text{Řada } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ diverguje.}}$

Protože víme, že $\lim s_n$ existuje, mužeme součet řady určit tak, že spočítáme limitu vybrané posloupnosti (s_{2^n}),

$$s_{2^n} = \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i \ln i} \Big) \geq \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k \ln 2^k} \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{2 \ln 2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \mapsto \quad +\infty\,.$$

Poznámka 1.15. I když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje pro sebemenší pevné kladné ε, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ je divergentní. Jelikož

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1\,,$$

má podle věty 1.14 řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ stejný charakter jako harmonická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

A nyní slíbená kritéria. První dvě kritéria získáme porovnáním zkoumané řady s geometrickou řadou.

Cauchyovo odmocninové kritérium - limitní tvar: *Nechť* $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
2) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. 1) Označme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Z věty o nerovnostech pro limity posloupnosti plyne, že od jistého n_0 počínaje pro každé n platí $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1+q}{2} < 1$. Odtud $a_n \leq (\frac{q+1}{2})^n$. Tvrzení pak plyne z věty 1.12 a z toho, že geometrická řada s kladným kvocientem $\frac{1+q}{2}$ menším než jedna konverguje.
2) Předpoklad implikuje, že od jistého indexu n počínaje je $a_n \geq 1$. Řada diverguje, protože není splněna ani nutná podmínka konvergence $a_n \mapsto 0$. □

d'Alembertovo podílové kritérium - limitní tvar: *Nechť* $a_n > 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
2) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

1) Případ $q < 1$: od jistého n_0 počínaje pro všechny indexy n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q+1}{2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, kde jako b_n jsme označili členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{q+1}{2} < 1$. Geometrická řada s takovými členy konverguje a podle věty 1.13 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

2) Případ $q > 1$: od jistého n_0 počínaje pro všechny indexy n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{q+1}{2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, kde jako b_n jsme označili členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{q+1}{2} > 1$. Geometrická řada s takovými členy diverguje a opět podle věty 1.13 diverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

□

Raabeovo kritérium - limitní tvar: *Nechť* $a_n > 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
2) *Když* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$.

1) Případ $\alpha > 1$. Označme $\varepsilon = \alpha - 1 > 0$ a uvažujme konvergentní řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} .$$

Ověříme-li platnost nerovnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, bude tvrzení plynout z věty 1.13. Za tímto účelem si rozepíšeme $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ pomocí Taylorova vzorce jako $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} - \frac{1}{n} \cdot \omega\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Nerovnost $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 + \varepsilon > 1$ implikuje, že od jistého n_0 počínaje $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq 1 + \frac{3}{4}\varepsilon$. To lze ekvivalentně přepsat jako $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\right)$. Stačí ukázat, že od jistého indexu je

$$1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\right) \overset{?}{\leq} 1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - \frac{1}{n} \cdot \omega\left(-\frac{1}{n}\right)$$

To přepíšeme po jednoduchých ekvivalentních úpravách (odečtení 1 a vynásobení nerovnosti číslem $-n$) na

$$1 + \frac{3}{4}\varepsilon \overset{?}{\geq} 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \omega\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Protože levá strana nerovnosti má limitu ostře větší než pravá strana, podle věty o nerovnostech v limitách existuje n_0 tak, že nerovnost, nad kterou jsme udělali otazník, platí pro $n \geq n_0$.

2) Nerovnost $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ vynucuje, že od jistého indexu n_0 platí $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Pokud zvolíme $b_n = \frac{1}{n-1}$, pak $1 - \frac{1}{n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, a divergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ plyne přímo z věty 1.13 a z toho, že řada $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ je divergentní. $\square$

Příklad 1.16. Máme rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+1}$. Použijeme Cauchyovo kritérium.

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n+1}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2.\ \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n}}} \mapsto \frac{1}{2} < 1\,.$$

Podle Cauchyho kritéria, řada řada konverguje.

Příklad 1.17. Máme rozhodnout o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (2 - \sqrt[2]{2}) \cdot (2 - \sqrt[3]{2}) \cdots (2 - \sqrt[n]{2})\,.$$

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - \sqrt[n]{2}$ má limitu 1. Není tedy možné použít d'Alembertovo kritérium. Zkoumejme výraz relevantní pro Raabeovo kritérium

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n(\sqrt[n]{2} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \ln 2\,.$$

Protože $\ln 2 < 1$, zkoumaná řada podle Raabeova kritéria diverguje.

Kapitolu zakončíme Gaussovým kritériem, které v podstatě jenom shrnuje předešlá kritéria.

Gaussovo kritérium: *Nechť* (a_n) *je kladná posloupnost, pro níž existují* $q, \alpha \in \mathbb{R}$, *kladné* ε *a omezená posloupnost* (c_n) *taková, že*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \textit{pro každé} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

1) *Když je* $q < 1$ *nebo když* $q = 1$ *a* $\alpha > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*

2) *Když je* $q > 1$ *nebo když* $q = 1$ *a* $\alpha \leq 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Z tvaru (1.1) dostaneme, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Je-li $q \neq 1$, dává tvrzení věty d'Alembertovo podílové kritérium v limitním tvaru.

Je-li $q = 1$, dostaneme z (1.1), že $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$ a pro $\alpha \neq 1$ umíme o konvergenci rozhodnout podle Raabeova kritéria.

Jediný případ, který zbývá diskutovat, je $q = 1$ a $\alpha = 1$. Uvažujme proto řadu, jejíž členy (a_n) vyhovují pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztahu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \,.$$

Tuto řadu srovnáme s řadou $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} b_n$, kde $b_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$. Tato divergentní řada je jednou z těch, které jsme uváděli mezi "kalibrovacími". Upravme nejdříve podíl jejích členu,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)\ln(n-1)}{n\ln n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \; + \; \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \,.$$

Když ukážeme, že nerovnost $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ platí od jistého indexu, bude z věty 1.13 plynout divergence řady $\sum_{k=1}^{n} a_n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \iff \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n\ln n} \iff c_n \geq \underbrace{\frac{n^{\varepsilon}}{\ln n}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to -1}$$

Protože výraz na pravé straně poslední nerovnosti má limitu $-\infty$ a protože je podle předpokladu posloupnost (c_n) omezená, nerovnost platí od jistého indexu n_0. $\square$

Příklad 1.18. Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Připomeňme, že

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \,.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je a_n od indexu $n_0 = \alpha + 1$ rovno 0, a proto řada konverguje. Uvažujme proto $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Při takovém α jsou všechny členy řady kladné. V Gaussově kritériu místo podílu a_{n+1}/a_n budeme upravovat podíl a_n/a_{n-1}. Zjednoduší se technické úpravy, a přitom charakter řady s členy a_{n-1} a řady s členy a_n je stejný.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left|\frac{\alpha - n + 1}{n}\right| = \left|1 - \frac{\alpha + 1}{n}\right| = 1 - \frac{\alpha + 1}{n} \qquad \text{pro každé} \;\; n > \alpha + 1\,.$$

Řada je tedy konvergentní právě tehdy, když $\alpha + 1 > 1$.

Připojením případu $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dostáváme závěr, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \geq 0$.

Tvar Gaussova kritéria by mohl svádět k domněnce, že neexistují řady s kladnými členy, o jejichž konvergenci toto kritérium nerozhodne. Ale opak je pravdou. O některých řadách totiž lze dokázat, že podíl a_{n+1}/a_n nelze vyjádřit ve tvaru požadovaném v Gaussově kritériu. Mezi takové patří řada v následujícím příkladě.

Příklad 1.19. Zkoumejme v závislosti na reálném parametru β konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}\,.$$

Když $\beta \leq 1$, tak pro každé $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ je

$$\frac{1}{n \ln^\beta n} \geq \frac{1}{n \ln n}\,.$$

Protože řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ je divergentní, plyne z věty 1.12 i divergence řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$.

Uvažujme proto $\beta > 1$. Označme $\varepsilon := \beta - 1 > 0$. U řady s kladnými členy

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln^\varepsilon n} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)}\right)$$

je snadné určit n-tý částečný součet $s_n = \frac{1}{\ln^\varepsilon 2} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)} \mapsto \frac{1}{\ln^\varepsilon 2}$. Jedná se tedy o konvergentní řadu. Ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln^\varepsilon n} - \frac{1}{\ln^\varepsilon (n+1)}}{\frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}} = \varepsilon > 0\,.$$

Upravme pomocí Taylorova vzorce $(1+x)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon x + \omega(x)x$, kde $\lim_0 \omega(x) = 0$, nejdříve následující výraz

$$\frac{1}{\ln^{\varepsilon}(n+1)} = \frac{1}{\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\varepsilon}} = \frac{1}{\ln^{\varepsilon} n}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\ln^{\varepsilon} n}\left(1 - \frac{\varepsilon \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \omega_n \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right), \quad \text{kde } \omega_n \to 0\,.$$

Proto

$$\frac{\frac{1}{\ln^{\varepsilon} n} - \frac{1}{\ln^{\varepsilon}(n+1)}}{\frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}} = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\varepsilon - \omega_n\right) \to \varepsilon\,.$$

Podle věty 1.14, je tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}$ konvergentní pro $\varepsilon > 0$. Dostali jsme tak další "kalibrovací"řadu.

Nechť $\beta \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$.

Nyní bychom mohli vytvořit nové, jemnější kritérium, které by ovšem opět nebylo univerzální.

1.1.2 Řady s obecnými členy

Při vyšetřování řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ začínáme se zkoumáním konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. V případě, že tato řada konverguje, jsme s úkolem hotovi. V opačném případě musíme použít jemnější kritéria.

Dirichletovo kritérium: *Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexní posloupnost splňující*

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je monotonní a* $\lim a_n = 0$*;*

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má omezenou posloupnost částečných součtu.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Konvergenci řady odvodíme z Bolzanova - Cauchyova kritéria. Pro odhad výrazu $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|$ použijeme Abelovy sumační formule. Označme pro pevné $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $k \in \mathbb{N}, k \geq n$

$$B_k := b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_k.$$

Speciálně tedy $B_n = 0$. Pak

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = a_{n+p} B_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k$$

Omezenost částečných součtu posloupnosti $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ znamená, že

$$(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})\big(\Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\Big| \leq K\big).$$

To pro $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ dává odhad $|B_k| \leq 2K$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti nyní mužeme odhadnout

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| \leq \Big|a_{n+p}B_{n+p}\Big| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\Big|\big(a_k - a_{k+1}\big)B_k\Big| \leq 2K|a_{n+p}| + 2K\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\Big|\big(a_k - a_{k+1}\big)\Big|$$

Jelikož (a_n) je monotonní posloupnost, jsou všechny rozdíly $a_k - a_{k+1}$ nekladné nebo nezáporné. Proto

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\Big|\big(a_k - a_{k+1}\big)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\big(a_k - a_{k+1}\big)\Big| = |a_{n+p} - a_{n+1}| \leq |a_{n+p}| + |a_{n+1}|$$

Pokračujeme proto v odhadu, přičemž využijeme monotonii (a_n).

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| \leq 2K\big(2|a_{n+p}| + |a_{n+1}|\big) \leq 6K\,|a_n|\,. \tag{1.2}$$

Podle předpokladu má posloupnost (a_n) nulovou limitu, což symbolicky lze zapsat

$$(\forall\tilde{\varepsilon} > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n| < \tilde{\varepsilon})\,. \tag{1.3}$$

Dostaneme-li kladné ε, položíme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6K}$. K tomuto $\tilde{\varepsilon}$ podle (1.3) nalezneme n_0 tak, že pro každé $n > n_0, n \in \mathbb{N}$ a pro každé $p \in \mathbb{N}$ podle (1.2) platí $\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| < 2K(2\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}) = 6K\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. To podle Bolzanova - Cauchyova kritéria dává konvergenci řady. $\square$

Příklad 1.20. Pomocí Dirichletova kritéria dokážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha n)}{n}$$

konverguje, když $\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Když je α celočíselným násobkem 2π, pak $\cos(\alpha n) = 1$ pro každé n a řada s členy $\frac{1}{n}$, tj. harmonická řada, je divergentní.

Nechť tedy $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Roli posloupnosti (a_n) v Dirichletově kritériu má posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$, která je klesající a má limitu 0; za posloupnost (b_n) bereme $(\cos(\alpha n))$. Protože

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha k)\Big| = \Big|\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Big| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}\,,$$

má (b_n) omezenou posloupnost částečných součtu. To implikuje konvergenci zkoumané řady. Tato řada ovšem nekonverguje absolutně, protože

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{\cos(\alpha n)}{n}\Big| \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2(\alpha n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos(2\alpha n)}{2n}\,.$$

Řada napravo je pro $\alpha \neq k\pi$ součtem divergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ a konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\alpha n)}{2n}$, tedy řada napravo je divergentní. Je-li $\alpha = k\pi$, je řada napravo harmonická, a tedy rovněž divergentní.

Odvodíme několik důsledků Dirichletova kritéria.

Abelovo kritérium: *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je reálná posloupnost a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexní posloupnost splňující*

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je monotonní a konvergentní;*

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *je konvergentní řada.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Označme $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje, protože je součtem dvou konvergentních řad:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

přičemž řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n$ konverguje podle Dirichleta a řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje podle předpokladu. □

Jednoduchým příkladem posloupnosti (b_n), která má omezené částečné součty, je posloupnost $b_n = (-1)^{n+1}$. Zřejmě platí $|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}| \leq 1$. Řady, kde n-tý člen má tvar $(-1)^{n+1}a_n$, přičemž posloupnost (a_n) nemění znaménka, se vyskytují často. Setkali jsme se s nimi např. při vyjádření funkcí $\sin x, \cos x$ a $\ln(1+x)$ pomocí Taylorova polynomu.

Definice 1.21. Nechť (a_n) je reálná posloupnost kladných čísel. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ nazýváme **řadou se střídavými znaménky**.

Vyslovíme dvě kritéria určená speciálně na řady se střídavými znaménky.

Leibnizovo kritérium: *Nechť* (a_n) *je klesající posloupnost kladných čísel. Když platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ *konverguje.*

Dukaz 1: Plyne přímo z Dirichletova kritéria, ve kterém položíme $b_n = (-1)^{n+1}$.

Dukaz 2: Jen pro zajímavost uvedeme i přímý jednoduchý dukaz. Protože

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \geq s_{2n} \qquad \text{a} \qquad s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0} \leq s_{2n-1},$$

je posloupnost (s_{2n}) rostoucí a (s_{2n-1}) klesající. Posloupnost sudých členu (s_{2n}) má tedy limitu $l_1 > -\infty$ a posloupnost lichých členu (s_{2n-1}) má limitu $l_2 < +\infty$. Jelikož navíc $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ a $\lim a_n = 0$, je limita posloupnosti (s_{2n}) rovna limitě posloupnosti (s_{2n-1}). Z pokrývací věty o limitách vybraných posloupností plyne, že existuje i $\lim s_n = l_1 = l_2 \neq \pm\infty$, tj. řada konverguje.
□

Když o konvergenci řady lze rozhodnout pomocí Leibnizova kritéria, pak rozdíl součtu řady od n-tého částečného součtu mužeme snadno odhadnout.

Odhad chyby: Nechť (a_n) je posloupnost klesající k nule. Součet konvergnetní řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ označme s. Pak

$$\left|s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\, a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\, a_k\right| = \underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+5} - a_{n+6}}_{\geq 0} \cdots ,$$

a proto

$$\left|s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\, a_k\right| = a_{n+1} \underbrace{-a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{-a_{n+4} + a_{n+5}}_{\leq 0} \cdots \leq a_{n+1}\,.$$

Součet s řady se střídavými znaménky se liší od sumy prvních n členu řady o míň, než je velikost dalšího členu řady.

Poznámka 1.22. Vraťme se k výpočtu hodnoty $\sin x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ s přesností 10^{-8}. Tuto úlohu jsme již řešili v kapitole o Taylorových polynomech. Protože $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ řadou se střídavými znaménky, je z předchozího pravidla jasné, že $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ se liší v absolutní hodnotě od $\sin x$ o méně než $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$. To je odhad stejně dobrý, jako výsledek odvozený pracněji pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Modifikované Gaussovo kritérium: *Nechť (a_n) je kladná posloupnost splňující pro nějaké $q, \alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezenou posloupnost (c_n) vztah*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \textit{pro každé} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

- *Je-li $q > 1$ nebo je-li $q = 1$ a $\alpha \leq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ diverguje.*
- *Je-li $q < 1$ nebo je-li $q = 1$ a $\alpha > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ konverguje absolutně.*

- *Je-li $q = 1$ a $\alpha \in (0, 1\rangle$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ konverguje neabsolutně.*

Důkaz. **1)** Nechť $q > 1$. Protože $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ implikuje $\lim a_n = +\infty$, není splněna ani nutná podmínka konvergence. Tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ diverguje.

2) Nechť $q < 1$. Pak podle Gaussova kritéria pro kladné řady dostaneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ konverguje absolutně.

3) Nechť $q = 1$. Rozlišíme čtyři případy.

3a) Nechť $\alpha > 1$. Pak podle Gaussova kritéria pro kladné řady dostaneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ konverguje absolutně.

3b) Nechť $\alpha < 0$. Protože $\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 0$, máme od jistého indexu nerovnost $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 0$, a tedy $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. To ale znamená, že kladná posloupnost (a_n) roste a že její limita nemuže být rovna 0. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ diverguje.

3c) Nechť $0 < \alpha \leq 1$. Podle Gaussova kritéria pro řady s kladnými členy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. Neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$ ukážeme ověřením podmínek Leibnizova kritéria.

Jelikož $\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 0$, je od jistého n_0 splněna nerovnost $k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) > \frac{\alpha}{2}$, tj.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 - \frac{\alpha}{2k} < 1 \qquad \text{pro všechna} \quad k \in \mathbb{N}, k > n_0\,. \tag{1.4}$$

To znamená, že kladná posloupnost (a_n) je klesající. Abychom ještě dokázali, že $\lim a_n = 0$, zlogaritmujeme (1.4) a dostaneme

$$\ln a_{k+1} - \ln a_k \; < \; \ln \left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right) \quad .$$

Sečtením předchozích nerovností pro $k = n_0, n_0 + 1, \ldots, n-1$ máme

$$\ln a_n - \ln a_{n_0} \; < \; \sum_{k=n_0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right). \tag{1.5}$$

Napravo je $(n-1)$-ní částečný součet řady se zápornými členy. Snadno ověříme, že je divergentní a to tak, že srovnáme řadu s kladnými členy $-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right)$ s řadou se členy $\frac{1}{n}$, která diverguje. Zřejmě,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\alpha}{2} \in (0, +\infty)$$

a podle věty 1.14, obě řady mají stejný charakter, tj. v našem případě obě divergují. Proto posloupnst částečných součtů napravo v nerovnosti (1.5) má limitu $-\infty$. Tedy i $\lim(a_n - a_{n_0}) = -\infty$. Což je možné jenom tak, že $\lim a_n = 0$, jak jsme potřebovali ke splnění předpokladů Leibnizova kritéria.

3d) Nechť $\alpha = 0$. Členy kladné posloupnosti (a_n) splňují

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Odvodíme, že vztah (1.6) vynucuje $\lim a_n \neq 0$, a tedy řada diverguje kvůli nesplnění nutné podmínky konvergence. Zlogaritmováním (1.6) dostaneme

$$\ln a_{k+1} - \ln a_k = \ln\Big(1 + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\Big) \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{N}, k > n_1.$$

Sečtením předchozích nerovností pro $k = n_1, n_1 + 1, \ldots, n-1$ máme

$$\ln a_n - \ln a_{n_1} = \sum_{k=n_1}^{n-1} \ln\Big(1 + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\Big).$$

Když ukážeme, že řada napravo je kovergentní, bude mít výraz nalevo konečnou limitu pro $n \to +\infty$, a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a_n \neq -\infty$, tj. $\lim a_n \neq 0$, jak jsme avizovali na začátku důkazu bodu 3d). K dokončení důkazu tedy stačí ověřit, že řada se členy $\ln\big(1 + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\big)$ je konvergentní. Ona je dokonce absolutně konvergentní. K úpravě členů řady využijeme Taylorův vzorec $\ln(1+x) = x + x\omega_1(x)$. Odtud

$$\Big|\ln\Big(1 + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\Big)\Big| = \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\Big(1 + \omega_1\big(\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\big)\Big) \leq M\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde M je konstanta omezující členy posloupnosti $c_n\Big(1+\omega_1\big(\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\big)\Big)$ - připomeňme, že předpoklad omezenosti (c_n) je v předpokladech znění věty. Samozřejmě, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} M\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ je při $\varepsilon > 0$ konvergentní, a tedy i řada s menšími členy $\big|\ln\big(1 + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\big)\big|$ je konvergentní.

□

Všechna kritéria, která jsme pro konvergenci řad s obecnými členy vyslovili, vyžadovala monotonii posloupnosti (a_n). U Gaussova kritéria to není patrné na první pohled. Ale v důkazu jsme viděli, že požadavek, aby podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ měl daný tvar, buď vynucuje monotonii (a_n) nebo implikuje $\lim a_n \neq 0$. Je tedy jasné, že např. pro vyšetřování řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

nelze použít žádné z dosud odvozených kritérií. Proto zavedeme na množině řad operaci závorkování, jejíž výsledek je někdy řada, chování které lze již vyšetřit pomocí uvedených kritérií.

Definice 1.23. (uzávorkování řady) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost a nechť $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel s nultým členem $k_0 = 0$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, jejíž členy definujeme předpisem

$$A_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

nazýváme **uzávorkováním** řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$.

Když označíme s_n částečné součty řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a S_n částečné součty jejího uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, pak $S_n = s_{k_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost částečných součtu (S_n) je vybrána z posloupnosti (s_n).

Věta 1.24. *Pokud řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i každé její uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$.*

Poznámka 1.25. Obrácené tvrzení neplatí. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ osciluje, zatímco její uzávorkování podle posloupnosti $(k_n) = (2n)$ je konvergentní řadou s členy $A_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z hlediska použití je věta 1.24 málo zajímavá. Závorkujeme přece v naději, že z chování uzávorkované řady budeme moci něco říct o neznámém chování řady puvodní. To nám umožní další věta.

Věta 1.26. *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzávorkování řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti (k_n). Nechť jsou splněny podmínky*

i) existuje $M \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $k_{n+1} - k_n \leq M$ a

ii) $\lim a_n = 0$.

Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Důkaz. Opět označíme S_n n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a s_n n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Uvažujme těchto M posloupností:

$$(S_n),\ (S_n + a_{k_n+1}),\ (S_n + a_{k_n+1} + a_{k_n+2}), \ldots, (S_n + a_{k_n+1} + a_{k_n+2} + \cdots + a_{k_n+M-1}).$$

Existuje-li $\lim S_n$, pak všechny tyto posloupnosti mají díky podmínce ii) tutéž limitu. Přitom všechny uvedené posloupnosti jsou vybrané z posloupnosti (s_n), konkrétně jsou to posloupnosti

$$(s_{k_n}),\ (s_{k_n+1}), (s_{k_n+2}), \ldots, (s_{k_n+M-1}).$$

Jelikož indexy vybraných posloupností vzhledem k podmínce i) pokrývají celé $\mathbb{N}$, plyne z pokrývací věty pro limity, že existuje také $\lim s_n$ a je rovna $\lim S_n$. $\square$

Příklad 1.27. Uzávorkujme řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

podle posloupnosti $(k_n) = (2n)$. Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}-2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \beta_n)\,,$$

kde

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}$$

a

$$\beta_n = \frac{2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}\,.$$

Přitom

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Tedy řada $\sum \alpha_n$ konverguje a řada $\sum \beta_n$ diverguje. Proto uzávorkovaná řada $\sum(\alpha_n - \beta_n)$ diverguje. Jelikož $\lim a_n = 0$, diverguje i puvodní řada. Přitom podle Leibnizova kritéria řada

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konverguje. Vidíme, jak je předpoklad monotonie v Leibnizově kritériu duležitý.

1.1.3 Přerovnání řady a násobení řad

Operace sčítání v $\mathbb{C}$ je komutativní. Proto při sčítání konečného počtu čísel nezáleží na pořadí, v jakém sčítáme. Teď se budeme věnovat otázce, co udělá záměna pořadí při nekonečně mnoha sčítancích.

Definice 1.28. Mějme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekci $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ nazýváme **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle ϕ.

Příklad 1.29. Uvažujme konvergentní řadu

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Součet řady jsme uměli určit již v zimním semestru s využitím rovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + \varepsilon_n, \quad \text{kde } \gamma \text{ je Eulerova konstanta a } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Pro $2n$-tý částečný součet s_{2n} totiž platí

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln 2n - \ln n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \quad \to \quad \ln 2\,.$$

Jelikož $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, je i $\lim s_{2n+1} = \ln 2$.

Členy řady teď uspořádáme tak, aby vždycky po dvou kladných členech následoval jeden záporný člen, tj. uvažujeme řadu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Formálně lze bijekci ϕ popsat předpisem

$$\phi(n) = \begin{cases} 2k, & \text{pro } n = 3k, \\ 4k-1, & \text{pro } n = 3k-1, \\ 4k-3, & \text{pro } n = 3k-2. \end{cases}$$

Budeme uvažovat součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, která vznikne z řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ uzávorkováním po třech. Protože limita n-tého členu řady je 0, mají obě řady stejný charakter a v případě konvergence i součet. Pro n-tý částečný součet S_n řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ platí

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} =$$

$$= \ln 4n + \gamma + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\Big(\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}\Big) - \tfrac{1}{2}\Big(\ln n + \gamma + \varepsilon_n\Big) \quad \to \quad \tfrac{3}{2}\ \ln 2\,.$$

Přerovnaná řada je tedy opět konvergentní, má ale jiný součet.

Poznamenejme, že řada, kterou jsme v předchozím příkladě přerovnali, byla neabsolutně konvergentní. Jak ukáže další věta, to je i duvodem, proč bylo možné přerovnáním změnit její součet. Předtím se ještě pro obecnou reálnou řadu podívejme zvlášť na chování kladných a na chování záporných členu.

Poznámka 1.30. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je reálná řada. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n^+ := \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{a} \quad a_n^- := \frac{|a_n| - a_n}{2}\,.$$

Snadno nahlédneme, že

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n\,, & \text{když } a_n > 0 \\ 0\,, & \text{když } a_n \le 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad a_n^- = \begin{cases} 0\,, & \text{když } a_n > 0 \\ -a_n\,, & \text{když } a_n \le 0 \end{cases}.$$

Rovněž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Z definičního vztahu pro a_n^+ a a_n^- dostaneme:

- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ konvergují a platí $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$.

- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ podstatně divergují, tj. mají obě součet $+\infty$.

Věta 1.31. *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak každé její přerovnání je absolutně konvergentní řada se stejným součtem.*

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $h_n := \max\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\}$. Protože ϕ je prosté, dostaneme $h_n \ge n$. Platí

$$\sum_{k=1}^{n} \left|a_{\phi(k)}\right| \;\le\; \sum_{k=1}^{h_n} |a_k| \;\le\; \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \in \mathbb{R}\,. \tag{1.7}$$

Posloupnost částečných součtu absolutních hodnot přerovnané řady je omezená, a tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ je absolutně konvergentní.

Důkaz toho, že přerovnáním nezměníme součet řady, rozdělíme na tři případy:

a) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \ge 0$. Pak odhad (1.7) říká, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Protože řada $\sum a_n$ vznikne přerovnáním z absolutně konvergentní řady $\sum a_{\phi(n)}$ pomocí bijekce ϕ^{-1}, platí také

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi^{-1}(\phi(n))} \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}.$$

To už dává rovnost součtu $\sum a_{\phi(n)} = \sum a_n$.

b) Pro reálnou absolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ využijeme pozorování, že $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy. Pro ty jsme už v bodě a) ukázali, že přerovnání nemění jejich součet. Proto mužeme psát

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_{\phi(n)}^+ - \sum a_{\phi(n)}^- = \sum a_{\phi(n)}.$$

c) Konverguje-li absolutně komplexní řada $\sum a_n$, pak ze vztahu $|a_n| \geq |\Re a_n|$ a $|a_n| \geq |\Im a_n|$ plyne, že konvergují absolutně i řady $\sum \Re a_n$ a $\sum \Im a_n$. U těchto řad už podle bodu b) přerovnání nezmění součet. Proto platí

$$\sum a_n = \sum \Re a_n + i \sum \Im a_n = \sum \Re a_{\phi(n)} + i \sum \Im a_{\phi(n)} = \sum a_{\phi(n)}$$

pro každé přerovnání. □

Věta 1.32. (Riemannova) *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní reálná řada. Pak ke každému $s \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje přerovnání $\sum a_{\phi(n)}$, jež má součet s. Rovněž existuje oscilující přerovnání $\sum a_{\psi(n)}$.*

Důkaz. Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, je $\lim a_n = 0$. Navíc se jedná o neabsolutní konvergenci, a proto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$. Vynecháním konečně mnoha členu řady nezměníme její charakter, a tedy

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n^- = +\infty \quad \text{pro každé} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Uvažujme $s \in \mathbb{R}$. Vlastnost (1.8) nám umožní přeuspořádávat členy posloupnosti (a_n) takto: Bereme postupně kladné členy tak dlouho, až jejich součet převýší hodnotu s. Jakmile přesáhneme s začneme k získanému součtu přidávat nekladné členy posloupnosti pokud nedocílíme součtu menšího než s. Jakmile součet klesne pod hodnotu s, začínáme přidávat k již vytvořenému součtu dosud nepoužité kladné členy posloupnosti až do doby, než prvně přesáhneme hodnotu s. Pak opět rozšiřujeme součet o další nekladné členy, abychom klesli pod hodnotu s, atd.

Z konstrukce je patrné, že každý člen posloupnosti (a_n) je vybrán právě jednou, a tedy se jedná o přerovnání řady. V každém kroku se částečný součet liší od s nanejvýš o absolutní hodnotu posledního členu, za kterým jsme začali vybírat členy s opačným znaménkem. Protože $\lim a_n = 0$, částečné součty konvergují k s.

Uvažujeme-li $s = +\infty$, proces vybírání členu posloupnosti (a_n) modifikujeme takto:
Bereme postupně kladné členy posloupnosti, dokud jejich součet nepřekročí hodnotu 1, pak k součtu přidáme první nekladný člen. Opět přidáváme kladné členy posloupnosti, až součet přesáhne hodnotu 2, pak k součtu přidáme v pořadí druhý nekladný člen. A znovu přidáváme

kladné členy posloupnosti, pokud nedosáhneme součtu většího než 3, atd. Je zřejmé, že limita částečných součtu je $+\infty$. Pro $s = -\infty$ je postup obdobný.

Chceme-li docílit oscilující řady, vybíráme střídavě z kladných a nekladných členu tak dlouho, až částečný součet přesáhne hodnotu 1, resp. klesne pod hodnotu -1. $\square$

V tělese platí kromě komutativních zákonu i distributivní zákony, a tedy součin dvou konečných součtu

$$(a_1 + a_n + \cdots + a_N)(b_1 + b_2 + \cdots + b_N)$$

lze získat jako součet čísel $a_i b_j$, kde probereme v libovolném pořadí všechny kombinace indexu i a j. Po zkušenosti s přerovnáváním řady už musíme být při násobení nekonečných součtu opatrní.

Definice 1.33. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady a $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nechť je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $c_n = a_i b_j$, kde $n = \phi(i,j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ nazýváme **součinem řad** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **a** $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Poznámka 1.34. Pro součin řad se používá značení

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j \ ,$$

které ale nepostihuje zvolenou bijekci ϕ, tedy nepostihuje pořadí sčítání v řadě. To ale nevadí v případě, že součin dvou řad je absolutně konvergentní řadou. V té, jak víme, na pořadí členu nezáleží.

Věta 1.35. *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní řady. Pak jejich libovolný součin je taky absolutně konvergentní řada a pro její součet platí*

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\Big) .$$

Důkaz. Mějme bijekci $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Číslo i_n nechť označuje první složku dvojice $\phi^{-1}(n)$ a číslo j_n druhou složku dvojice $\phi^{-1}(n)$, tj. $\phi(i_n, j_n) = n$.

Položme $k_n := \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{k_n} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{k_n} |b_k|\Big) \le \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|\Big) .$$

To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|$ má omezené částečné součty. Proto je $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ absolutně konvergentní. Součet absolutně konvergentní řady lze získat z libovolného přerovnání a libovolného uzávorkování řady. Označme

$$M_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, i \le k, j \le k, (k-i)(k-j) = 0\} .$$

Zřejmě

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathbb{N}^2 \quad \text{a} \quad M_k \cap M_\ell = \emptyset\,, \quad \text{když} \quad k \ne \ell.$$

Součet řady lze tedy získat takto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in M_k} a_i b_j \;=\; \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) .$$

□

Definice 1.36. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady. Řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\Big)$$

nazýváme **součinovou řadou** řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Poznámka 1.37. Součinová řada je uzávorkováním jednoho konkrétního součinu dvou řad. Proto mužeme rovnou vyslovit dusledek předchozí věty.

Důsledek 1.38. *Pro absolutně konvergentní řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *platí*

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\Big) .$$

Začíná-li indexování členu řad od jiného indexu než jedna, např. od nuly, musíme příslušně upravit i indexování součinové řady. Protože

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}\,,$$

platí pro absolutně konvergentní řady

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} b_{n-k-1}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k-2}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) .$$

Komplexní mocnina: Uvažujme dvě absolutně konvergentní řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^n}{n!}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Určeme n-tý člen jejich součinové řady

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n .$$

Z dusledku tedy plyne

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(\alpha+\beta\big)^n}{n!} .$$

To nás ale nepřekvapuje. Z kapitoly o Taylorově rozvoji už víme, že $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pro každé reálné x, a tedy jsme dokázali tvrzení

$$e^{\alpha} . e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}, \tag{1.9}$$

které je pro reálné exponenty zřejmé z definice obecné mocniny. Fakt, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ je konvergentní pro každé komplexní z, nám umožňuje definovat komplexní mocninu předpisem

$$\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro} \quad z \in \mathbb{C}}$$

Ukázali jsme tedy platnost vztahu (1.9) pro každé komplexní α a β. Konečně mužeme psát

$$e^{i\phi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}\phi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}\phi^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\phi + i \sin\phi$$

a odvodit tak vztah

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \;\; \text{pro každé} \quad \phi \in \mathbb{R}}$$

užitečný ve fyzice, v elektrotechnice a pod.

Kapitola 2

Riemannův integrál

2.1 Horní a dolní integrální součty funkce

Definice 2.1. Je dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nazýváme **rozdělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům x_k pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ říkáme dělicí body intervalu $\langle a, b\rangle$; intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$ při rozdělení σ.

Úmluva: Nechť T je zobrazení a nechť B je podmnožina jeho definičního oboru. Kvůli zkrácení zápisu budeme pro supremum resp. infimum množiny $T(B) = \{T(x) | x \in B\}$ používat zápis $\sup\limits_B T(x)$ a $\inf\limits_B T(x)$. V případě, že zmíněná množina má maximum nebo minimum, budeme jej zapisovat $\max\limits_B T(x)$ resp. $\min\limits_B T(x)$.

Definice 2.2. Nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\} = \hat{n}$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\limits_{\hat{n}} \Delta_k$ nazýváme **normou rozdělení** σ.

Příklad 2.3. Rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$\sigma_n = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \ldots, a + (n-1)\Delta, a + n\Delta = b\}, \quad \text{kde} \quad \Delta = \tfrac{b-a}{n},$$

má všechny vzdálenosti mezi dělícími body stejné. Proto se mu říká **ekvidistantní**. Jeho normou je $\nu(\sigma_n) = \frac{b-a}{n}$.

Definice 2.4. Nechť σ a σ' jsou rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$. Pak σ' nazýváme **zjemněním** rozdělení σ.

Poznámka 2.5. 1) Když σ' je zjemněním σ, pak pro normy platí nerovnost $\nu(\sigma) \geq \nu(\sigma')$.
2) Když σ_1 a σ_2 jsou dvě rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\sigma_1 \cup \sigma_2$ je společným zjemněním rozdělení σ_1 i σ_2.

Definice 2.6. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \qquad \text{a} \qquad m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \qquad \text{a} \qquad s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, součtem funkce f při rozdělení σ.

Správně bychom měli v zápisu horního a dolního součtu vyznačovat k jaké funkci a k jakému intervalu se součty vztahují. Zápis by však byl nepřehledný. Vyznačení funkce $S_f(\sigma)$ resp. intervalu $S_{\langle a,b\rangle}(\sigma)$ budeme užívat pouze v případě, kdy budeme pracovat na stejném intervalu s více funkcemi, resp. s jednou funkcí na více intervalech.

Věta 2.7. *Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $s(\sigma) \le S(\sigma)$. Navíc je množina $\{s(\sigma) \,|\, \sigma$ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle\}$ dolních součtů a množina $\{S(\sigma) \,|\, \sigma$ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle\}$ horních součtů omezena.*

Důkaz. Označme $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$ a $m = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. Z definice čísel M, m, M_i, m_i plyne $m \le m_i \le M_i \le M$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Vynásobením těchto nerovností kladným Δ_i a sčítáním přes $i = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$m \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \;\le\; M \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \,.$$

Protože $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i = b - a$, lze předchozí nerovnosti přepsat $m(b-a) \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le M(b-a)$. Tedy množiny dolních i horních součtů jsou shora omezeny konstantou $M(b-a)$ a zdola konstantou $m(b-a)$. $\square$

Lemma 2.8. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť σ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a σ' jeho zjemnění. Pak*

$$s(\sigma) \le s(\sigma') \le S(\sigma') \le S(\sigma)\,.$$

Důkaz. Nejdříve uvažujme zjemnění $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$ pro $c \notin \sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tedy původní rozdělení zjemníme přidáním jediného bodu. Nechť c leží v i-tém částečném intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Platí

$$S(\sigma') = S(\sigma) - (x_i - x_{i-1}) \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) + (x_i - c) \sup_{\langle c, x_i\rangle} f(x) + (c - x_{i-1}) \sup_{\langle x_{i-1}, c\rangle} f(x) =$$

$$= S(\sigma) - \underbrace{(x_i - c)}\Big(\underbrace{\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \sup_{\langle c,x_i\rangle} f(x)}\Big) - \underbrace{(c - x_{i-1})}\Big(\underbrace{\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \sup_{\langle x_{i-1},c\rangle} f(x)}\Big).$$

Výrazy ve svorkách jsou zřejmě nezáporné. Proto $S(\sigma')$ dostaneme z $S(\sigma)$ po odečtení dvou nezáporných čísel. Tedy $S(\sigma) \geq S(\sigma')$.

Zatím jsme uvažovali pouze zjemnění, která vznikla z původního σ přidáním jediného bodu. Libovolné zjemnění lze vytvořit z původního opakovaným přidáváním po jednom bodu. Po každém přidání bodu je horní součet nového rozdělení menší nebo roven předchozímu.

Důkaz nerovnosti pro dolní součty je analogický. □

Věta 2.9. *Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť σ_1 a σ_2 jsou dvě rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2).$$

Důkaz. Jelikož $\sigma_1 \cup \sigma_2$ je společným zjemněním obou rozdělení, plyne z lemmatu 2.8

$$s(\sigma_1) \leq s(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(\sigma_2)\,.$$

□

Budou nás zajímat množiny všech horních a všech dolních součtů funkce f. Už jsme ukázali, že obě tyto množiny jsou omezené zdola závorou $m(b-a)$ a shora závorou $M(b-a)$. Těchto závor se při volbě nejhrubšího rozdělení $\sigma = \{a, b\}$ nabývá, t.j.,

$$M(b-a) = \max\{S(\sigma)|\sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\} \qquad \text{a} \qquad m(b-a) = \min\{s(\sigma)|\sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\}.$$

Motivací ke zkoumání horních součtů $S(\sigma)$ byl horní odhad plochy ohraničené funkcí a osou x. Proto je daleko důležitější k množině horních součtů najít její infimum. Analogicky pro dolní součty.

Definice 2.10. Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Infimum množiny horních součtu a supremum množiny dolních součtu nazýváme **horním**, resp. **dolním integrálním součtem** funkce f a značíme

$$\int_a^{\overline{b}} f = \inf\{S(\sigma)|\sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\}\,, \quad \text{resp.} \quad \int_{\underline{a}}^b f = \sup\{s(\sigma)|\sigma \text{ je rozdělení } \langle a,b\rangle\}\,.$$

Lemma 2.11. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existuje posloupnost $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \int_a^{\overline{b}} f \qquad a \qquad \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \int_{\underline{a}}^b f.$$

Je-li $(\sigma'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost taková, že σ'_n je zjemněním rozdělení σ_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak také platí

$$\lim_{n\to\infty} S(\sigma'_n) = \overline{\int_a^b} f \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} s(\sigma'_n) = \underline{\int_a^b} f.$$

Důkaz. Podle definice $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ je rozdělení } \langle a, b\rangle\}$. Z druhé vlastnosti infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ - označíme jej $\tilde{\sigma}_n$ - takové, že $S(\tilde{\sigma}_n) < \overline{\int_a^b} f + \frac{1}{n}$. Analogicky pro $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(\sigma) \mid \sigma \text{ je rozdělení } \langle a, b\rangle\}$ využijeme druhou vlastnost suprema a ke každému $n \in \mathbb{N}$ nalezneme rozdělení σ^*_n tak, aby $\underline{\int_a^b} f - \frac{1}{n} < s(\sigma^*_n)$. Položme $\sigma_n = \tilde{\sigma}_n \cup \sigma^*_n$. Jelikož σ_n je zjemněním $\tilde{\sigma}_n$ a zároveň je σ'_n ze znění lemmatu zjemněním σ_n, Lemma 2.8 a první vlastnost infima zaručuje

$$\overline{\int_a^b} f \le S(\sigma'_n) \le S(\sigma_n) \le S(\tilde{\sigma}_n) < \overline{\int_a^b} f + \frac{1}{n}\,.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti implikuje $\overline{\int_a^b} f = \lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma'_n)$. Obdobnou argumentaci lze využít i pro dolní součty. □

Věta 2.12. *Pro funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ platí*

$$\underline{\int_a^b} f \;\le\; \overline{\int_a^b} f\,.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.11 existuje posloupnost (σ_n) taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \overline{\int_a^b} f$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \underline{\int_a^b} f$. Podle věty 2.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s(\sigma_n) \le S(\sigma_n)$. Z věty o nerovnostech pro limity posloupnosti už plyne dokazované tvrzení. □

2.2 Určitý integrál: Cauchyova-Riemannova definice

Definice určitého integrálu[1], kterou uvedeme, je spojena se jmény Riemanna a Cauchyho.

Definice 2.13. Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Je-li $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, říkáme, že f má v intervalu $\langle a, b\rangle$ **Riemannuv integrál**. Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. O funkci f říkáme, že je **integrovatelná** v $\langle a, b\rangle$.

[1]Diferenciální a integrální počet vybudovali nezávisle Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz. Do ucelené teorie zahrnuli všechny roztříštěné, izolované objevy svých předchůdců. Oba pracovali s pojmem nekonečně malé veličiny. I když měli jisté pochybnosti o aktuální existenci nekonečně malých veličin, praktické výpočty, které bylo možné na jejich základě provádět, pochybnosti rozptýlily. V dnešní době s takovými výpočty zacházíme opatrněji, pracujeme s pojmy upřesněnými pomocí limity a nikoliv s infinitezimálními veličinami. Poznamenejme, že současná matematika se k postupum práce s infinitezimálními veličinami vrátila v rámci formálně vybudované nestandardní analýzy.

Příklad 2.14. Funkce konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$ má pro každé rozdělení σ stejný horní i dolní součet $s(\sigma) = S(\sigma) = c \cdot (b - a)$. Proto se horní i dolní integrální součet shoduje a platí $\int_a^b c = c \cdot (b - a)$.

Příklad 2.15. Funkce Dirichletova má $\sup\limits_J f(x) = 1$ a $\inf\limits_J f(x) = 0$ na každém intervalu $J = \langle a, b\rangle$. Proto $s(\sigma) = 0 \cdot (b - a)$ a $S(\sigma) = 1 \cdot (b - a)$. Z toho plyne

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = 0, \quad \int_a^{\overline{b}} f = b - a, \qquad \text{a proto } \int_a^b f \ \text{ neexistuje.}$$

Věta 2.16. (Newtonova formule) *Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že*

1) F je spojitá na $\langle a, b\rangle$;

2) $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f \ = \ F(b) - F(a) \ \overset{ozn.}{=} \ [F(x)]_a^b$$

Důkaz. Uvažujme rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce F na intervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \dots, n$, dostaneme $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta_i$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Zřejmě platí nerovnosti

$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \le f(\xi_i) \le \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = M_i$$

Proto

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i = S(\sigma)\,.$$

Jelikož $\sum_{i=1}^{n}\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = F(b) - F(a)$, pro libovolné rozdělení σ platí

$$s(\sigma) \le F(b) - F(a) \le S(\sigma)\,.$$

Číslo $F(b) - F(a)$ je dolní závorou množiny horních součtů, a proto je menší než její infimum, tj. $F(b) - F(a) \le \int_a^{\overline{b}} f$. Současně je $F(b) - F(a)$ horní závorou množiny dolních součtů, a tedy $F(b) - F(a) \ge \int_{\underline{a}}^{b} f$.

Až v závěru důkazu využijeme předpoklad existence integrálu, tj.

$$\int_a^b f = \int_{\underline{a}}^{b} f \le F(b) - F(a) \le \int_a^{\overline{b}} f = \int_a^b f \qquad \text{a odtud} \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f\,.$$

$\square$

Poznámka 2.17. Předpoklad existence $\int_a^b f$ v Newtonově formuli je důležitý. V roce 1881 V. Volterra[2] sestrojil příklad funkce F spojité na $\langle a,b\rangle$, která má omezenou derivaci F', ale F' není funkce integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Neuvedeme žádný příklad takovéto funkce, protože pro všechny známé funkce s touto vlastností je důkaz neexistence integrálu zdlouhavý.

Věta 2.18. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když existuje posloupnost $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ taková že $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_n)$.*

V kladném případě $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_n)$.

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) plyne z lemmatu 2.11.

Implikace ($\Leftarrow$) je důsledkem nerovnosti $s(\sigma) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(\sigma)$, která platí pro libovolné rozdělení σ, tedy speciálně i pro členy posloupnosti (σ_n) a také důsledkem věty o limitě sevřené posloupnosti. $\square$

Lemma 2.19. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nechť je posloupnost rozdělní intervalu $\langle a,b\rangle$.*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(S(\sigma_n) - s(\sigma_n)\Big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n).$$

Důkaz. Protože množiny horních i dolních součtů jsou omezené, limity $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_n)$ - pokud exitují - jsou nutně konečné. Implikace ($\Leftarrow$) je tudíž zřejmá.

K důkazu implikace ($\Rightarrow$) stačí ukázat, že z faktu $\lim\limits_{n\to\infty}\big(S(\sigma_n) - s(\sigma_n)\big) = 0$ plyne existence $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_n)$. Předpokládejme pro spor, že limita neexistuje. Lze tedy vybrat dvě podposloupnosti (σ_{k_n}) a (σ_{h_n}) tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_{k_n}) = \ell_1 < \ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_{h_n})$. Z platnosti levé strany dokazované implikace plyne pro dolní součty $\lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_{h_n}) = \ell_2$.

Podle věty 2.9, je $S(\sigma_{k_n}) \geq s(\sigma_{h_n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a přitom $\lim\limits_{n\to\infty} S(\sigma_{k_n}) < \lim\limits_{n\to\infty} s(\sigma_{h_n})$, což je kýžený spor. $\square$

Věta 2.20. (nutná a postačující podmínka existence integrálu) *Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\int_a^b f \;\; \textit{existuje} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\varepsilon > 0)\big(\exists \textit{ rozdělení } \sigma \textit{ intervalu } \langle a,b\rangle\big)\Big(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon\Big).$$

Důkaz. Věta je přímým důsledkem ekvivalencí ve větě 2.18 a v předchozím lemmatu. $\square$

I když máme nutnou a postačující podmínku existence integrálu, její tvar není šikovný pro ověřování. Je však velice užitečný pro důkaz existence $\int_a^b f$ u funkcí spojitých nebo monotonních.

Věta 2.21. *Funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$ má v tomto intervalu integrál $\int_a^b f$.*

[2]Vitto Volterra (1860 - 1940), italský matematik, proslavil se výsledky v oblasti integrálních rovnic

Důkaz. Podle Cantorovy věty je funkce spojitá na uzavřeném intervalu spojitá stejnoměrně, tj.

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in \langle a, b\rangle)(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \tilde{\varepsilon})\,.$$

Uvažujme libovolné kladné ε a položme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(b-a)$. Ke kladnému δ, které získáme k $\tilde{\varepsilon}$ v definici stejnoměrné spojitosti, sestrojíme rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby jeho norma byla menší než δ. Protože funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu svého suprema i infima, existují pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ čísla $\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ taková, že $m_i = f(\xi_i)$ a $M_i = f(\eta_i)$. Tedy zřejmě $|\eta_i - \xi_i| \le \Delta_i < \delta$. Proto

$$0 \le S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \big(M_i - m_i\big)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\eta_i) - f(\xi_i)\big)\Delta_i < \tilde{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \tilde{\varepsilon}(b-a) = \varepsilon\,.$$

To už podle věty 2.20 znamená existenci $\int_a^b f$. □

Příklad 2.22. Vypočítejme $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ pomocí Newtonovy formule. Existence integrálu je zaručena spojitostí integrované funkce. Nejdříve nalezneme primitivní funkci.

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{2+\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x \ =$$

a po substituci $\mathrm{tg}\, x = t$ pokračujeme

$$= \int \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}} =: F(x)$$

Funkce F je primitivní funkcí na intervalu $(0, \pi/2)$, ale aby F byla spojitá na $\langle 0, \pi/2\rangle$, musíme dodefinovat

$$F(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2_-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Z Newtonovy formule dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \ = \ F(\pi/2) - F(0) \ = \ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Počítejme určitý integrál ze stejné funkce ale v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Primitivní funkci počítáme stejně. Zapomeneme-li na požadavek spojitosti a jenom formálně dosadíme horní a dolní mez, dostaneme $F(\pi) - F(0) = 0$, což je nemožné pro integrál z kladné funkce.

Věta 2.23. *Funkce f monotonní v intervalu $\langle a, b\rangle$ má v tomto intervalu integrál $\int_a^b f$.*

Důkaz. Opět ověříme, že je splněna nutná a postačující podmínka existence integrálu. Existenci integrálu pro konstantní funkce jsme již ukázali v příkladě 2.14. Proto předpokládejme bez újmy na obecnosti, že f je klesající funkce a že $f(a) > f(b)$. Ke kladnému ε zkonstruujme rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby jeho norma byla menší než $\delta := \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$. V následujícím odhadu využijeme toho, že funkce klesající v uzavřeném intervalu nabývá suprema M_i v levém a infima m_i v pravém kraji intervalu,

$$0 \leq S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\Big)\Delta_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\Big) = \delta\big(f(a) - f(b)\big) = \varepsilon\,.$$

Splnění této podmínky už implikuje existenci $\int_a^b f$. □

V apendixu příklad 2.65 demonstruje, že ani spojitost ani monotonie nejsou nutnou podmínkou pro existenci integrálu.

Na druhé straně lze ukázat, že funkce f, která je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, má nekonečně mnoho bodů spojitosti. Zájemce najde toto tvrzení v Appendixu jako Větu 2.63.

2.3 Linearita určitého integrálu a aditivita v mezích

Následující technické lemma nám poslouží k důkazu toho, že zobrazení $f \mapsto \int_a^b f$ je lineární funkcionál na jistém vektorovém prostoru funkcí.

Lemma 2.24. *Nechť f a g jsou funkce omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$ a σ nechť je rozdělení tohoto intervalu. Pak*

1. $s_f(\sigma) + s_g(\sigma) \leq s_{f+g}(\sigma) \leq S_{f+g}(\sigma) \leq S_f(\sigma) + S_g(\sigma)$;
2. $s_{\alpha f}(\sigma) = \alpha s_f(\sigma)$ *a* $S_{\alpha f}(\sigma) = \alpha S_f(\sigma)$, *pokud je číslo* $\alpha > 0$;
3. $s_{\alpha f}(\sigma) = \alpha S_f(\sigma)$ *a* $S_{\alpha f}(\sigma) = \alpha s_f(\sigma)$, *pokud je číslo* $\alpha < 0$.

Důkaz. Uvažujme libovolný interval $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Z definice součtu dvou fnkcí a 1. vlastnosti supréma množiny platí

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup_{\langle c,d\rangle} f(x) + \sup_{\langle c,d\rangle} g(x) \qquad \text{pro každé } x \in \langle c, d\rangle$$

a odtud

$$\sup_{\langle c,d\rangle} (f+g)(x) \leq \sup_{\langle c,d\rangle} f(x) + \sup_{\langle c,d\rangle} g(x).$$

Nyní předchozí nerovnost odvozenou pro libovolný interval $\langle c, d\rangle$ aplikujeme na částečné intervaly rozdělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Pak každou nerovnost vynásobíme kladným číslem Δ_i

a sečteme přes všechny $i = 1, 2, \ldots, n$. Dostaneme

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} (f+g)(x)}_{S_{f+g}(\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)}_{S_f(\sigma)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} g(x)}_{S_g(\sigma)} \tag{2.1}$$

Pro dolní součty analogicky odvodíme $s_f(\sigma) + s_g(\sigma) \leq s_{f+g}(\sigma)$.

Pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ platí $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ a $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$, pokud je $\alpha \geq 0$. Obdobně $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A$ a $\inf(\alpha A) = \alpha \sup A$, pokud je $\alpha < 0$. Z této jednoduché vlastnosti suprema a infima množiny po vynásobení číslem α už lze snadno odvodit body 2. a 3. lemmatu. □

Věta 2.25. *(linearita určitého integrálu) Nechť f a g jsou funkce omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokud existují $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$, pak existují také $\int_a^b (f+g)$ a $\int_a^b (\alpha f)$. Navíc platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{a} \qquad \int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f.$$

Důkaz. Protože integrály z funkce f a z funkce g existují, podle lemmatu 2.11 nalezneme dvě posloupnosti rozdělení $(\sigma_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ a $(\sigma_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ s vlastností

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n^{(1)}) \qquad \text{a} \qquad \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} S_g(\sigma_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty} s_g(\sigma_n^{(2)}) \,. \tag{2.2}$$

Definujme $\sigma_n = \sigma_n^{(1)} \cup \sigma_n^{(2)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dosaďme σ_n do nerovnosti lemmatu 2.24.

$$s_f(\sigma_n) + s_g(\sigma_n) \leq s_{f+g}(\sigma_n) \leq S_{f+g}(\sigma_n) \leq S_f(\sigma_n) + S_g(\sigma_n) \tag{2.3}$$

Jelikož σ_n je zjemněním rozdělní $\sigma_n^{(1)}$ a také $\sigma_n^{(2)}$, druhá část lemmatu 2.11 implikuje, že výraz $s_f(\sigma_n) + s_g(\sigma_n)$ a výraz $S_f(\sigma_n) + S_g(\sigma_n)$ mají stejnou limitu, totiž $\int_a^b f + \int_a^b g$. Větu o limitě sevřené posloupnosti aplikujeme na nerovnost (2.3) a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} s_{f+g}(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_{f+g}(\sigma_n) = \int_a^b f + \int_a^b g \,.$$

To už podle věty 2.18 znamená, že integrál $\int_a^b (f+g)$ existuje a je roven $\int_a^b f + \int_a^b g$.

Uvažujme rozdělení $(\sigma_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ uvedené výše a $\alpha \in \mathbb{R}$. Ze vztahu vztahu (2.2) a lemmatu 2.24 plyne

$$\alpha \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \alpha S_f(\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} \alpha s_f(\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} S_{\alpha f}(\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} s_{\alpha f}(\sigma_n^{(1)}).$$

Věta 2.18 už vynucuje existenci $\int_a^b (\alpha f)$ a jeho hodnotu $\alpha \int_a^b f$. □

Věta 2.26. *(aditivita v mezích integrálu) Nechť $-\infty < a < c < b < +\infty$. Je-li f integrovatelná v intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$, pak f je integrovatelná i v intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.*

Důkaz. Podle věty 2.18 najdeme posloupnost $(\sigma_n^{(1)})$ rozdělení intervalu $\langle a, c\rangle$ a posloupnost $(\sigma_n^{(2)})$ rozdělení intervalu $\langle c, b\rangle$ takové, že

$$\int_a^c f = \lim_{n\to\infty} S_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} s_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) \quad \text{a} \quad \int_c^b f = \lim_{n\to\infty} S_{\langle c,b\rangle}(\sigma_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty} s_{\langle c,b\rangle}(\sigma_n^{(2)}) \tag{2.4}$$

Položme $\sigma_n = \sigma_n^{(1)} \cup \sigma_n^{(2)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro toto rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) = S_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) + S_{\langle c,b\rangle}(\sigma_n^{(2)}) \quad \text{a} \quad s_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) = s_{\langle a,c\rangle}(\sigma_n^{(1)}) + s_{\langle c,b\rangle}(\sigma_n^{(2)})\,.$$

Vztah (2.4) a věta o limitě součtu dvou posloupnosti implikují, že pro posloupnost (σ_n) rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$\lim_{n\to\infty} S_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{n\to\infty} s_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n)\,.$$

Věta 2.18 už zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f$ a jeho hodnotu $\int_a^c f + \int_c^b f$. □

Poznámka 2.27. Z existence $\int_a^b (f+g)$ neplyne existence $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$. Stačí uvažovat Dirichletovu funkci f a položit $g = -f$.

Poznámka 2.28. Změna hodnoty funkce v konečném počtu bodů nezmění existenci ani případnou hodnotu integrálu. Stačí dokázat případ, kdy změníme funkci v jednom bodě.

Když f a g jsou funkce omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle - \{c\}$, pak pro libovolné rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$|S_f(\sigma) - S_g(\sigma)| \leq \nu(\sigma).\Big(\sup_{\langle a,b\rangle} f - \inf_{\langle a,b\rangle} g\Big) \quad \text{a} \quad |s_f(\sigma) - s_g(\sigma)| \leq \nu(\sigma).\Big(\sup_{\langle a,b\rangle} f - \inf_{\langle a,b\rangle} g\Big) \tag{2.5}$$

Existuje-li např. integrál $\int_a^b f$, pak podle věty 2.18 je pro jistou posloupnost (σ_n) rozdělení $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme zjemnění $\sigma_n^* = \sigma_n \cup \tilde{\sigma}_n$, kde $\tilde{\sigma}_n$ je ekvidistantní rozdělení intervalu, viz příklad 2.3. Pak pro normu σ_n^* platí $\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n^*) = 0$ a podle druhé části lemmatu 2.11 také $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n^*) = \lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n^*)$.

Pokud za rozdělení σ v nerovnostech (2.5) dosadíme σ_n^*, odvodíme, že $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_g(\sigma_n^*) = \lim_{n\to\infty} s_g(\sigma_n^*)$. To podle věty 2.18 znamená, že $\int_a^b g$ existuje a jeho hodnota je $\int_a^b f$.

Poznámka 2.29. Nechť f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá až na **konečný počet skoků**. Pak integrál $\int_a^b$ existuje.

Zdůvodněme si tento fakt: řekněme, že $c_1, c_2, \ldots, c_k$, kde $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leq b$ jsou body skoků funkce f. Integrál $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f$ existuje, protože změnou funkční hodnoty f nanejvýš v bodech c_{i-1} a c_i lze získat funkci spojitou, a tedy integrovatelnou na $\langle c_{i-1}, c_i\rangle$. Změna funkční hodnoty funkce ve dvou bodech neovlivní ani existenci ani hodnotu integrálu. Stejná úvaha platí i pro integrály $\int_a^{c_1} f$ a $\int_{c_k}^b f$. Využijeme opakovaně aditivity integrálu v mezích a dostaneme, že existuje integrál $\int_a^b f$ a platí

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^{c_1} f \;+ \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \;+\cdots+\; \int_{c_k}^b f\,.$$

2.4 Nerovnosti v určitém integrálu

Věta 2.30. (o nerovnostech v integrálu) *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $\int_a^b f \;\le\; \int_a^b g$.*

Důkaz. Uvažujme funkci h integrovatelnou a nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro její infimum m na tomto intervalu platí $m \ge 0$. Protože pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ je dolní součet $s(\sigma) \ge m(b-a) \ge 0$, je nutně i $\int_a^b h \ge 0$.

Z předpokladů věty a z linearity integrálu plyne, že funkce $h := f - g$ je integrovatelná a nezáporná. Proto $0 \le \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$. □

Je-li funkce f ostře větš'ı než funkce g na $\langle a, b\rangle$, pak strá nerovnost platí i mezi hodnotami inteǵralů, viz věta 2.66 v appendixu.

Věta 2.31. *Nechť f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$. Pak $|f|$ je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\Big|\int_a^b f\;\Big| \;\le\; \int_a^b |f|\,.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro každou funkci omezenou na $\langle c, d\rangle$ platí

$$\sup_{\langle c,d\rangle} |f| - \inf_{\langle c,d\rangle} |f| \le \sup_{\langle c,d\rangle} f - \inf_{\langle c,d\rangle} f\;. \tag{2.6}$$

Dukaz této nerovnosti je jednoduchý pro funkci nezápornou na celém $\langle c, d\rangle$. Tam je totiž $\sup |f| = \sup f$ a $\inf |f| = \inf f$, a proto jde v (2.6) o rovnost. Pro funkci nekladnou na celém $\langle c, d\rangle$, je $\sup |f| = -\inf f$ a $\inf |f| = -\sup f$, a také v (2.6) platí rovnost. Zbývá diskutovat funkci f, která na $\langle c, d\rangle$ nabývá jak kladných tak záporných hodnot. Pro následující odhad využijeme toho, že $\inf |f| > 0$, $-\inf f > 0$ a toho, že maximum ze dvou kladných čísel je menší než jejich součet:

$$\sup_{\langle c,d\rangle} |f| - \inf_{\langle c,d\rangle} |f| \le \sup_{\langle c,d\rangle} |f| = \max\{\sup_{\langle c,d\rangle} f\,, -\inf_{\langle c,d\rangle} f\} \le \sup_{\langle c,d\rangle} f - \inf_{\langle c,d\rangle} f\,.$$

Právě dokázaná nerovnost (2.6) implikuje pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$

$$S_{|f|}(\sigma) - s_{|f|}(\sigma) \leq S_f(\sigma) - s_f(\sigma)\,. \tag{2.7}$$

Existenci $\int_a^b f$ lze ekvivalentně přepsat

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \sigma\big)\Big(S_f(\sigma) - s_f(\sigma) < \varepsilon\Big).$$

To spolu s (2.7) znamená, že funkce $|f|$ splňuje na $\langle a, b\rangle$ nutnou a postačující podmínku pro existenci integrálu. Proto $\int_a^b |f|$ existuje.

Nerovnosti $|f| \geq f$ a $|f| \geq -f$ implikují podle věty o nerovnostech v integrálech, že $\int_a^b |f| \geq \int_a^b f$ a $\int_a^b |f| \geq -\int_a^b f$. To dává $\int_a^b |f| \geq \left|\int_a^b f\right|$. □

2.5 Integrál jako funkce horní meze

Začneme tuto kapitolu doplňkem k definici určitého integrálu. Z technických důvodů je výhodné, když nemusíme hlídat, zda horní mez v určitém integrálu je skutečně větší než dolní.

Definice 2.32. Pokud $a \in D_f$, klademe $\int_a^a f = 0$. Pokud je funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$, definujeme $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Ukážeme, že i při této mírné zobecněné definici integrálu platí věta o aditivitě v mezích. Nejdříve však technické lemma.

Lemma 2.33. *Nechť $-\infty < a \leq c < d \leq b < +\infty$. Je-li f integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, pak f je integrovatelná i v $\langle c, d\rangle$.*

Důkaz. Z existence $\int_a^b f$ plyne existence posloupnosti rozdělení (σ_n) intervalu $\langle a, b\rangle$ s vlastností $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n)$. Nejdříve vytvoříme $\sigma_n^* = \sigma_n \cup \{c, d\}$, což je jemnější rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a k němu předpisem $\tilde{\sigma}_n = \sigma_n^* \cap \langle c, d\rangle$ definujeme rozdělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Poznamenejme, že body c, d jsme museli přidat k výchozímu rozdělní σ_n, aby rozdělení intervalu $\langle c, d\rangle$ tyto body obsahovalo. Protože σ_n^* je zjemněním rozdělení σ_n a všechny částečné intervaly rozdělení $\tilde{\sigma}_n$ jsou obsaženy v rozdělení σ_n^*, platí

$$0 \leq S_{\langle c,d\rangle}(\tilde{\sigma}_n) - s_{\langle c,d\rangle}(\tilde{\sigma}_n) \leq S_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n^*) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n^*) \leq S_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma_n).$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(S_{\langle c,d\rangle}(\tilde{\sigma}_n) - s_{\langle c,d\rangle}(\tilde{\sigma}_n)\Big) = 0$. Podle věty 2.18 a lemmatu 2.19 to znamená, že $\int_c^d f$ existuje. □

Věta 2.34. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a nechť existují dva z integrálů $\int_a^b f$, $\int_a^c f$ a $\int_c^b f$. Pak existuje i třetí integrál a platí* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz. Když mezi čísly a, b, c nastane alespoň jedna rovnost, je věta přímým důsledkem toho, že integrál se stejnou horní a dolní mezí klademe roven 0. Stačí tedy diskutovat $3! = 6$ možností uspořádání různých čísel a, b, c. Diskutujme nejdříve případ $a < b < c$:

Pokud jeden z dvojice integrálů, které podle předpokladu mají existovat, je $\int_a^c f$, pak podle předchozího lemmatu a definice 2.32 existují i zbylé dva integrály. Pokud existují integrály $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$, plyne z věty 2.26 existence integrálu $\int_a^c f$. Tedy v každém případě z existence dvou integrálů plyne existence všech tří integálů.

Podle věty 2.26 pro ně platí rovnost $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Odtud $\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$, jak tvrdí dokazovaná věta. Ostatní možnosti uspořádání čísel a, b, c se diskutují podobně. □

Věta 2.35. (integrál jako funkce horní meze) *Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkce $F : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ definovaná předpisem $F(x) = \int_a^x f$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, je funkce F diferencovatelná v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz. Funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, existuje tedy K tak, že $|f(x)| \le K$ pro každé x. Pro odhad rozdílu $F(x) - F(x_0)$ využijeme aditivity v mezích integrálu

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f|\right| \le \left|\int_{x_0}^x K\right| \le K|x - x_0|\,.$$

Když pro dané kladné ε položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, bude pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\,.$$

To znamená, že F je spojitá v bodě x_0, jak jsme měli ukázat.

Pro dukaz další části tvrzení předpokládáme, že bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je bodem spojitosti funkce f. To lze ekvivalentně přepsat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \langle a, b\,\rangle)\big(\ |t - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon\ \big)\,.$$

Uvažujme x takové, že $x_0 < x < x_0 + \delta$. Z věty o nerovnostech v integrálech získáme horní odhad

$$F(x) - F(x_0) \ = \int_{x_0}^x f \ < \ \int_{x_0}^x \big(f(x_0) + \varepsilon\big) = \big(f(x_0) + \varepsilon\big) \cdot (x - x_0)$$

a odhad z druhé strany

$$F(x) - F(x_0) \ = \int_{x_0}^{x} f \ > \int_{x_0}^{x} \big(f(x_0) - \varepsilon\big) = \big(f(x_0) - \varepsilon\big) \cdot (x - x_0)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$-\varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) < \varepsilon$$

Pro x z levého δ-okolí bodu x_0 dostaneme stejný odhad. Celkově

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\big(\forall x \in \langle a, b\,\rangle\big) \left(\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon \right),$$

a to je definice faktu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,,$$

jak jsme chtěli ukázat. □

Protože $\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f$, obdobné tvrzení lze samožřejmě dokázat i pro funkci s pohyblivou dolní mezí v integrálu. Symbolicky lze psát

$$\left(\int_a^x f\right)' = f(x) \quad \text{a} \quad \left(\int_x^b f\right)' = -f(x)\,. \tag{2.8}$$

Nyní mužeme dokázat, jak jsme to slíbili v kapitole Primitivní funkce, větu o existenci primitivní funkci k funkci spojité.

Důsledek 2.36. *Funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b) má v tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz. Zvolme libovolně ale pevně $c \in (a, b)$. Spojitost funkce f implikuje existenci určitého integrálu od c do x pro každé $x \in (a, b)$. Proto lze položit $F(x) := \int_c^x f$. Podle předchozí věty je $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a, b)$. □

2.6 Výpočet určitého integrálu

Věta 2.37. (metoda per partes pro určitý integrál) *Nechť funkce f a g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a diferencovatelné v (a, b). Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ = \ [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Předpoklady věty zaručují, že funkce fg je primitivní funkcí k funkci $f'g + fg'$ v intervalu (a, b) a fg je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Proto z Newtonovy formule $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$. Linearita integrálu už dokazuje větu. □

Příklad 2.38.

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x \ = \ \Big[\frac{x^2+1}{2} \ \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 1 \ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

Poznámka 2.39. Větu lze vyslovit i v jednodušším tvaru, kdy se požaduje spojitost všech funkcí. Ta už implikuje existenci obou integrálu:

Když funkce f, g, f' a g' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Tato věta má však omezené použití. Např. na výpočet integrálu

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \ \mathrm{d}x$$

při volbě $f(x) = x$ a $g(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ jí nelze použít, jelikož funkce $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$ je neomezená na $(0, 3)$, a tedy funkci g' nelze udělat spojitou na $\langle 0, 3\rangle$.

Věta 2.40. (substituce v určitém integrálu) *Nechť pro funkce f a ϕ platí*

1) *ϕ je spojitá na $\langle\alpha, \beta\rangle$ a diferencovatelná v (α, β);*
2) *f je spojitá na $\phi\langle\alpha, \beta\rangle$.*

Pak

$$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big).\phi'(t) \ \mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x \ ,$$

pokud integrál nalevo existuje.

Důkaz. Funkce ϕ je spojitá, proto $\phi\langle\alpha, \beta\rangle$ je uzavřený interval. Zvolme libovolně bod $c \in \phi\langle\alpha, \beta\rangle$ a položme $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in \phi\langle\alpha, \beta\rangle$. Tato funkce F je podle věty 2.35 spojitá a diferencovatelná na $\phi\langle\alpha, \beta\rangle$. Proto složená funkce $F\big(\phi(t)\big)$ je spojitá na $\langle\alpha, \beta\rangle$ a má derivaci $f\big(\phi(t)\big).\phi'(t)$ v intervalu (α, β). Z Newtonovy formule plyne

$$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big).\phi'(t) \ \mathrm{d}t \ = \ \big[F(\phi(t))\big]_\alpha^\beta = F\big(\phi(\beta)\big) - F\big(\phi(\alpha)\big) = \int_c^{\phi(\beta)} f - \int_c^{\phi(\alpha)} f = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f\,.$$

Při úpravách jsme použili aditivity integrálu v mezích. □

Příklad 2.41. Pro výpočet následujícího integrálu použijeme nejdříve substituci $x = \cos t$ pro $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ a posléze substituci $t = \pi/2 - y$ pro $y \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = \ \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \ (-\sin t) \ \mathrm{d}t \ = \ \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \ \mathrm{d}t \ =$$

$$= \ -\int_{\pi/2}^0 \sin^2(\pi/2-y) \ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \ \mathrm{d}y \ = \ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \big(\sin^2 y+\cos^2 y\big) \ \mathrm{d}y \ = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 \ \mathrm{d}y \ = \ \frac{\pi}{4}\,.$$

2.7 Věty o střední hodnotě integrálu

V případě, že neumíme najít primitivní funkci k funkci f, musíme se při výpočtu integrálu $\int_a^b f$ obrátit k nějaké numerické metodě. Často však v aplikacích není nutné znát přesnou hodnotu integrálu a postačuje "rozumný"odhad.

Příklad 2.42. Uvažujme $a > 0$ a odhadněme integrál $\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\right|$.

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad -\int_a^{2a} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \le \int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \le \int_a^{2a} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

A tedy

$$\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\right| \le \ln 2\,.$$

Obecnější návod na odhadování hodnot integrálu nám dají věty o střední hodnotě integrálu.

Věta 2.43. (1. věta o střední hodnotě) *Nechť funkce f a g omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$ mají tyto vlastnosti: funkce f je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a součin fg je integrovatelný na $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$\textit{existuje} \quad \mu \in \langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g\rangle \quad \textit{takové, že} \quad \int_a^b fg = \mu \int_a^b f\,.$$

Je-li navíc funkce g spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že $\mu = g(\xi)$.

Důkaz. Označme m infimum a M supremum funkce g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak z platnosti nerovnosti $m \le g(x) \le M$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ a z toho, že $f(x) \ge 0$ dostaneme

$$mf(x) \le g(x)f(x) \le Mf(x) \quad \Rightarrow \quad m\int_a^b f \le \int_a^b fg \le M\int_a^b f\,. \tag{2.9}$$

Je-li $\int_a^b f = 0$, pak z nerovností v (2.9) plyne $\int_a^b fg = 0$. V tomto případě lze zvolit μ libovolně z intervalu $\langle m, M\rangle$.

Uvažujme teď případ $\int_a^b f \ne 0$. To spolu s nezáporností f implikuje $\int_a^b f > 0$. Položme $\mu = \int_a^b fg / \int_a^b f$. Pak (2.9) po vydělení kladným číslem $\int_a^b f$ dává nerovnost $\mu \in \langle m, M\rangle$, jak tvrdí věta. □

Poznámka 2.44. Předchozí věta platí i v případě, kdy předpoklad nezápornosti funkce f je nahrazen její nekladností.

Poznámka 2.45. Při volbě funkce $f(x) = 1$ pro každe $x \in \langle a, b\rangle$ věta říká: $\int_a^b g = \mu(b-a)$. Číslo μ se nazývá střední hodnota funkce g. Číslo μ vystihuje jakou výšku by měl mít obdélník nad intervalem $\langle a, b\rangle$, aby jeho plocha byla stejná, jako plocha mezi osou x a grafem kladné funkce g.

Věta 2.46. (2. věta o střední hodnotě) *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť funkce g je na intervalu $\langle a, b\rangle$ monotonní a spojitě diferencovatelná. Pak*

$$\text{existuje } \ \xi \in \langle a, b\rangle \ \text{ tak, že } \quad \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f\,.$$

Důkaz. Diferencovatelnost funkce g a její monotonie zaručují, že g je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a g' nemění na tomto intervalu znaménko. Podle Newtonovy formule $\int_a^b g' = g(b)-g(a)$. Položme $F(x) = \int_a^x f$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Podle věty 2.35 platí, že $F'(x) = f(x)$ na celém intervalu. Integrujeme per partes,

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,. \tag{2.10}$$

Z věty o střední hodnotě aplikované na funkci F a nezápornou, resp. nekladnou, funkci g' dostaneme

$$\int_a^b Fg' = F(\xi)\int_a^b g' = F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)\,. \tag{2.11}$$

Dosazením (2.11) do(2.10) dostaneme

$$\int_a^b fg = g(a)\big(F(\xi) - F(a)\big) + g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big)\,.$$

To už je ekvivalentní s tvrzením věty. □

Poznámka 2.47. 2. větu o střední hodnotě lze vyslovit a dokázat za daleko slabších předpokladů, než obsahuje předchozí věta. Čtenáře odkazujeme na appendix.

Příklad 2.48. Odhadněme stejně jako v příkladě 2.42 integrál $\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|$, pro $a > 0$. Použijeme 2. větu o střední hodnotě, kde za f bereme spojitou, a tedy integrovatelnou funkci $f(x) = \sin x$ a za g vezmeme klesající a spojitě diferencovatelnou funkci $g(x) = \frac{1}{x}$. Dostaneme odhad

$$\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int_\xi^{2a} \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2a}\left|2\cos a - \cos\xi + \cos(2a)\right| \le \frac{2}{a}\,,$$

který ukazuje, že hodnota integrálu s rostoucím a klesá k 0. To z odhadu $\left|\int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \ln 2$ získaného v příkladu (2.42) nelze vyčíst.

Věta 2.49. (integrální tvar zbytku) *Nechť pro nezáporné celé číslo n, funkci f a bod a platí, že existuje okolí H_a, na kterém má funkce f spojitou $(n+1)$-ní derivaci. Pak n-tý zbytek $R_n(x)$*

v Taylorově vzorci je pro každé $x \in H_a$ roven

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí na n.

• Nejdříve uvažujme $n = 0$. Když má funkce f na jistém okolí bodu a spojitou první derivaci, Newtonova formule říká, že

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Jelikož je 0-tý Tayloruv polynom $T_0(x) = f(a)$, dává předchozí vztah rovnost pro zbytek

$$R_0(x) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

jak jsme měli ukázat.

• Pro indukční krok předpokádejme, že funkce f má spojitou $(n+2)$-hou derivaci na okolí H_a. To implikuje, že také $(n+1)$-ní derivace je spojitá. Z indukčního předpokladu a metody per partes dostaneme $R_n(x) =$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \left(\left[\underbrace{-\tfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1}}_{u(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)} \right]_a^x + \int_a^x \tfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) \, \mathrm{d}t \right) .$$

Odtud pak

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že z definice Taylorova polynomu a zbytku v Taylorově vzorci plyne

$$R_n(x) = T_{n+1}(x) - T_n(x) + R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x) \,.$$

Srovnáním obou vyjádření pro zbytek $R_n(x)$ už snadno odvodíme

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

jak vyžaduje indukční krok. Tím je věta dokázána. $\square$

Využitím integrálního tvaru zbytku a 1. věty o střední hodnotě integrálu, lze snadno odvodit Lagrangeův i Cauchyho tvar zbytku. Budeme však navíc předpokládat, že f má na jistém okolí bodu a spojitou $(n+1)$-ní derivaci.

Lagrangeův tvar zbytku: Na interval s koncovými body a a x použijme první větu o střední hodnotě, speciálně tvar, kde funkce g byla spojitá. Roli $f(t)$ hraje funkce $(x-t)^n$ a roli spojité funkce $g(t)$ hraje funkce $f^{(n+1)}(t)$. Poznamenejme, že pro pevné $x \in H_a$ funkce $(x-t)^n$ nemění znamánko na intervalu s koncovými body a a x. Proto existuje ξ v intervalu s koncovými body a a x takové, že

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\ f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n \ \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x-a)^{n+1}.$$

Cauchyho tvar zbytku: Opět použijeme 1. větu o střední hodnotě integŕalu. Nyní roli $f(t)$ hraje konstantní funkce 1 a roli spojité funkce $g(t)$ hraje funkce $(x-t)^n f^{(n+1)}(t)$. Dostaneme

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\ (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x 1 \ \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\ (x-\xi)^n (x-a).$$

2.8 Alikace určitého integrálu

2.8.1 Délka grafu funkce

Představme si, že naším úkolem je změřit délku spojité čáry namalované na papíře. Kdybychom měli k dispozici rovné pravítko s vyznačenými milimetrovými vzdálenostmi, tak bychom si na čáře zvolili dostatečný počet bodů, vzdálenosti sousedních bodů bychom změřili a tyto vzdálenosti pak sečetli. To, co bychom takto dostali, by bylo o něco kratší než skutečná délka čáry, chyba našeho odhadu délky by závisela na množství bodu zvolených na čáře. Tato jednoduchá myšlenka je schována za definicí délky grafu funkce.

Definice 2.50. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(x_i - x_{i-1}\big)^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2}$$

nazýváme **délka lomené čáry** aproximující graf funkce f při rozdělení σ.

Na grafu funkce f jsme tedy v předchozí definici zvolili $n+1$ bodťvaru $\big(x_i, f(x_i)\big)$ a vzdálenosti dvou sousedních bodu $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$ a $\big(x_i, f(x_i)\big)$ jsme vypočetli pomocí Pythagorovy věty.

Poznámka 2.51. Z definice $\ell(\sigma)$ a trojúhelníkové nerovnosti je zřejmé, že

$$\ell(\sigma') \ge \ell(\sigma) \quad \text{pro každé zjemnění } \sigma' \text{ rozdělení } \sigma.$$

Definice 2.52. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$L := \sup_{\sigma} \ell(\sigma)$$

nazýváme **délkou grafu funkce** f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $L < +\infty$, říkáme, že graf funkce je **rektifikovatelný**.

Příklad 2.53. Zkonstruujeme příklad nerektifikovatelného grafu funkce. V rovině definujme body

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \text{a} \quad B_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Množina bodu sestávající ze sjednocení bodu 0 a úseček

$$B_1A_2,\ A_2B_3,\ B_3A_4,\ A_4B_5,\ B_5A_6, \ldots, B_{2n-1}A_{2n},\ A_{2n}B_{2n+1} \ldots$$

je grafem spojité funkce f s definičním oborem $\langle 0, 1\rangle$ a oborem hodnot $\langle 0, 1/2\rangle$.

Graf této funkce není rektifikovatelný. Dokazuje to následující úvaha:

Protože délky úseček $B_{2k-1}A_{2k}$ a $A_{2k}B_{2k+1}$ jsou v součtu větší než $1/k$, je při rozdělení $\sigma_n := \left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ délka lomené čáry $\ell(\sigma_n) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, je $L = \sup_\sigma \ell(\sigma) = +\infty$.

Poznámka 2.54. V případě, že funkce f má na intervalu (a, b) derivaci, lze výrazy v sumě definující délku lomené čáry lze vyjádřit i ve tvaru

$$\sqrt{\big(x_i - x_{i-1}\big)^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2} = (x_i - x_{i-1})\,\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

a na úpravu zlomku pod odmocninou použít Lagrangeovu větu o přírustku funkce. Pro délku lomené čáry dostaneme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sqrt{1 + \Big(f'(\eta_i)\Big)^2}, \quad \text{kde } \eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \tag{2.12}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že je-li navíc derivace f' omezna konstantou K, je

$$\ell(\sigma) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + K^2} = (b - a)\sqrt{1 + K^2} < +\infty,$$

a tedy graf dané funkce je rektifikovatelný.

Věta 2.55. *Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak graf funkce f je rektifikovatelný a pro jeho délku L platí*

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Důkaz. Z vlastnosti supréma najdeme pro každé $n\in\mathbb{N}$ rozdělení $\tilde\sigma_n$ takové, že $L \geq \ell(\tilde\sigma_n) > L-\frac{1}{n}$. Z předpokladů věty plyne existence integrálu $I=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, kde $g(x)=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$. A tedy existuje posloupnost (σ_n^*) rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} S_g(\sigma_n^*) = I = \lim\limits_{n\to\infty} s_g(\sigma_n^*)$.

Označme $\sigma_n = \tilde\sigma_n \cup \sigma_n^*$.

Ze vztahu (2.12) pro rozdělení σ_n odvodíme $s_g(\sigma_n)\leq \ell(\sigma_n)\leq S_g(\sigma_n)$. Protože σ_n je zjemněním rozdělení $\tilde\sigma_n$ a také zjemněním rozdělení σ_n^* platí podle poznámky 2.51 a lemmatu 2.8

$$L\geq \ell(\sigma_n)\geq \ell(\tilde\sigma_n) > L-\frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad s_g^*(\sigma_n)\leq s_g(\sigma_n)\leq \ell(\sigma_n)\leq S_g(\sigma_n)\leq S_g^*(\sigma_n)$$

Aplikací věty o limiě sevřené posloupnosti získáme $L=\lim\limits_{n\to\infty}\ell(\sigma_n) = I$, jak jsem chtěli ukázat.

□

Příklad 2.56. Spočítejme délku L té části paraboly $f(x)=x(1-x)$, která leží nad osou x, tedy počítáme délku grafu funkce v intervalu $\langle 0,1\rangle$. Jelikož $f'(x)=1-2x$, platí

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x \ = \Big\{\text{substituce } \ 2x-1=y\Big\} = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Využijeme sudosti funkce $\sqrt{1+y^2}$ a aplikujeme metodu per partes

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y \ = \Big[y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^1 \ - \ \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y \ + \ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Z předešlého vztahu vyjádříme L a využijeme faktu, že funkce $\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Proto

$$L=\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{2}\Big[\ln(y+\sqrt{1+y^2})\Big]_0^1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\,.$$

2.8.2 Objem a plášť rotačního tělesa

Mějme funkci f spojitou na intervalu $\langle a,b\rangle$. Nechme její graf rotovat kolem osy x. Naším úkolem bude určite objem takto vzniklého tělesa. Tento úkol umíme snadno vyřešit pro konstantní funkci.

Je-li totiž $f(x) = c \neq 0$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak vzniklé těleso je válec, jehož základna je kruh o ploše πc^2 a výška válce je $b - a$. Objem válce je $V_f = \pi c^2(b - a)$. Právě této znalosti využijeme při odvození objemu rotačního tělesa. Nejdříve si uvědomme, že rotací grafu funkce f a grafu funkce $|f|$ vznikne stejné rotační těleso. Označme M a m maximum resp. minimum funkce $|f|$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pro objem V_f tělesa vzniklého rotací grafu funkce f zřejmě platí

$$\pi m^2(b-a) \ \leq \ V_f \ \leq \ \pi M^2(b-a)\,. \tag{2.13}$$

Uvažujeme rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a označme $M_i = \max\limits_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} |f(x)|$ a $m_i = \min\limits_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} |f(x)|$. Upevněme dílčí interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Použijeme-li (2.13) pro funkci f na tomto dílčím intervalu, dostaneme dolní a horní odhad objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce s definičním oborem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Sečtením objemů přes všechny dílčí intervaly dostaneme pro celkový objem V_f odhad

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \ \leq \ V_f \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}) \tag{2.14}$$

Všimněme si, že výraz napravo je horní součet funkce f^2 při rozdělení σ vynásobený číslem π a analogické tvrzení platí pro výraz nalevo. Tento vztah platí pro každé rozdělení σ. Proto

$$\pi \sup_{\sigma} S_{f^2}(\sigma) \ \leq \ V_f \leq \ \pi \ \inf_{\sigma} S_{f^2}(\sigma) \tag{2.15}$$

Jelikož uvažujeme funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje na tomto intervalu i integrál z funkce f^2, a platí $\int_a^b f^2 = \sup_\sigma S_{f^2}(\sigma) = \inf_\sigma S_{f^2}(\sigma)$. Odvodili jsme tedy tvrzení

Věta 2.57. *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy* x*, je $\pi \int_a^b f^2$.*

Příklad 2.58. Rovnice $x^2+y^2 = R^2$ popisuje kruh o poloměru R se středem v počátku souřadné soustavy. Jeho rotací kolem osy x vznikne koule o poloměru R. Kolem osy x rotuje tedy graf funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ s definičním oborem $\langle -R, R\rangle$. Podle předchozí věty je

$$\text{objem koule o poloměru } R \ = \ \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \ = \ \pi \Big[R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-R}^{R} \ = \ \tfrac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Opět necháme rotovat kolem osy x graf funkce $f(x)$ spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Úkolem je spočítat plášť vzniklého rotačního tělesa. Pojem plášť nezahrnujeme povrch kruhů $\pi(f(a))^2$ a $\pi(f(b))^2$. Celý povrch rotačního tělesa získáme až po přičtení ploch těchto kruhů k plášti. Pro výpočet pláště nám poslouží následující věta. Nebudeme ji dokazovat. Výpočet povrchů obecných těles (ne pouze rotačních) bude totiž obsahem dalšího kurzu matematické analýzy.

Věta 2.59. *Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak plášť tělesa vzniklého rotací grafu funkce je $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$.*

Příklad 2.60. Část paraboly $f(x) = x(1-x)$, kde $x \in \langle 0,1\rangle$, necháme rotovat kolem osy x a spočítame povrch rotačního tělesa. Protože $f(0) = f(1) = 0$, představuje plášť P už celý povrch rotačního tělesa. Podle předchozí věty

$$P = 2\pi \int_0^1 x(1-x)\sqrt{1+(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Výpočet integrálu přenecháme čtenáři.

2.9 Integrální kritérium konvergence řad

Věta 2.61. *Nechť f je nezáporná funkce klesající na intervalu $\langle 1,+\infty)$.*

$$\textit{Řada} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\int_1^n f \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Funkce f je klesající na intervalu $\langle k, k+1\rangle$, kde $k \in \mathbb{N}$. Tedy existuje integrál $\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Také existují integrály z konstantních funkcí $\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x$ a $\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x$. Pro každé $x \in \langle k, k+1\rangle$ platí $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Věta o nerovnostech v integrálech implikuje

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x = f(k+1) \qquad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Sečteme tyto nerovnosti pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a využijeme aditivity integrálu v mezích. Při označení s_n pro n-tý částečný součet řady dostneme

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = s_n - s_1\,.$$

Poznamenejme, že posloupnosti (s_n) a $\left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ jsou rostoucí a tudíž limity těchto posloupnosti existují. Z předchozí nerovnosti plyne, že obě posloupnsti mají buď současně konečnou limitu, nebo obě mají limitu $+\infty$. $\square$

Příklad 2.62. Zkoumejme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{\beta}(n+1)}$ v závislosti na parametru $\beta > 0$. Protože $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^{\beta}(x+1)}$ je klesající na intervalu $\langle 1,+\infty)$, stačí studovat $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Snadno ověříme, že primitivní funkce k $f(x)$ je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(x+1)} & \text{pokud } \beta \neq 1 \\ \ln\big(\ln(x+1)\big) & \text{pokud } \beta = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} F(n) - F(1) = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } \beta \le 1, \\ \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)} & \text{pokud } \beta > 1. \end{cases}$$

Tedy řada konverguje právě pro $\beta > 1$. Tento výsledek jsme očekávali, protože stejnou řadu jsme zkoumali v příkladě 1.19.

2.10 Apendix

Věta 2.63. *Nechť funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak funkce f má v $\langle a, b\rangle$ nekonečně mnoho bodu spojitosti.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každý interval $\langle a, b\rangle$ a pro každou funkci f integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ platí, že v $\langle a, b\rangle$ existuje alespoň jeden bod spojitosti f. Tím bude věta dokázána, protože z existence $\int_a^b f$ plyne existence $\int_c^d f$ pro sebemenší interval $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, a v intervalu $\langle c, d\rangle$ tedy taky najdeme bod spojitosti funkce f.

Nechť existuje $\int_a^b f$. Zvolme libovolně $\varepsilon_1 > 0$. Z nutné a postačující podmínky pro existenci integrálu plyne, že existuje takové rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$S_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - s_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i < \varepsilon_1(b-a).$$

A tedy alespoň na jednom částečném intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je rozdíl $M_i - m_i$ suprema a infima menší než ε_1. Označme prostřední třetinu tohoto intervalu jako $\langle a_1, b_1\rangle$.
Protože existuje i $\int_{a_1}^{b_1} f$, úvahu opakujeme pro kladné ε_2 a interval $\langle a_1, b_1\rangle$. Zase najdeme rozdělení σ intervalu $\langle a_1, b_1\rangle$, kde

$$S_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) - s_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\big(M_i - m_i\big)\Delta_i < \varepsilon_2(b_1-a_1).$$

A tedy alespoň na jednom částečném intervalu je rozdíl $M_i - m_i$ suprema a infima menší než ε_2. Prostřední třetinu tohoto částečného intervalu označíme $\langle a_2, b_2\rangle$. Takto mužeme pokračovat dál.

Volíme-li kladná čísla ε_n tak, aby $\lim \varepsilon_n = 0$, dostáváme posloupnost do sebe vnořených intervalu $\langle a, b\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \langle a_2, b_2\rangle \supset \ldots$, přičemž rozdíl suprema a infima funkce f je na intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ menší než ε_n. Posloupnost levých kraju (a_n) těchto intervalu tvoří ostře rostoucí posloupnost a posloupnost pravých kraju (b_n) ostře klesající posloupnost, přičemž $a_n < b_n$ pro každé n. Proto

$$c := \lim_{n\to+\infty} a_n \in (a_n, b_n) \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Teď ukážeme, že bod c je bodem spojitosti funkce f.

Nechť je dáno kladné ε. Najdeme n tak, aby $\varepsilon > \varepsilon_n$ a položíme $\delta := \min\{c-a_n, b_n-c\}$. Pak δ-okolí $(c-\delta, c+\delta) \subset (a_n, b_n)$, a proto pro každé x z tohoto okolí je rozdíl $f(x) - f(c)$ omezen rozdílem suprema a infima funkce f na intervalu (a_n, b_n). Ten je menší než $\varepsilon_n < \varepsilon$. To dokazuje spojitost f v bodě c. $\square$

Poznámka 2.64. Malou obměnou předchozího důkazu lze dokonce odvodit, že množina bodů spojitosti funkce f integrovatelné v $\langle a, b\rangle$ má mohutnost kontinua, tj. mohutnost $\mathbb{R}$.

Příklad 2.65. Připomeňme definici Riemannovy funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro iracionální } \; x\,, \\ \frac{1}{q} & \text{pro } \; x = \frac{p}{q}, \;\; p, q \text{ nesoudělná celá}, \;\; q \geq 1\,. \end{cases}$$

Tato funkce je omezena shora číslem 1, zdola nulou. Je nespojitá v každém racionálním bodě $x \neq 0$ a spojitá v každém iracionálním bodě. Ukážeme, že integrál této "hodně" nespojité funkce existuje.[3] Počítáme $\int_0^1 f$. Protože $\inf f = 0$ na každém intervalu, je $s(\sigma) = 0$ pro každé rozdělení σ.

Pro nalezení horního integrálního součtu zvolme přirozené n a popišme body z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, ve kterých je funkční hodnota větší nebo rovna $\frac{1}{n}$. Jsou to zkrácené zlomky $x = \frac{p}{q}$, kde $0 < p < q \leq n$, protože $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geq \frac{1}{n}$. Takových zlomku není více než páru přirozených čísel splňujících $0 < p < q \leq n$. Těch je $\binom{n}{2}$. Uvažujme ekvidistantní rozdělení σ_n intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na n^3 částečných intervalků stejné délky $\Delta = \frac{1}{n^3}$. Pak

$$S(\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n^3} M_k \Delta = \sum_{k,\ kde\ M_k < \frac{1}{n}} M_k \Delta + \sum_{k,\ kde\ M_k \geq \frac{1}{n}} M_k \Delta \;\leq$$

$$\leq\; n^3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3} + \binom{n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} \;=\; \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n^2}\,.$$

Z definice horního a dolního integrálního součtu plyne, že

$$s(\sigma_n) = 0 \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(\sigma_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n^2}\,.$$

[3]Riemannuv puvodní příklad "hodně"nespojité funkce, která přesto má integrál, je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\langle xn\rangle}{n^2}\,,$$

kde $\langle x\rangle$ je funkce periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 1, přičemž klademe $\langle x\rangle := x$ pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $\langle \frac{1}{2}\rangle := 0$. Tímto příkladem se Riemann dostal daleko za Cauchyovy představy o tom, že je rozumné integrovat jenom funkce po částech spojité.

Aplikace věty o limitě sevřené posloupnosti dostaneme, že dolní i horní integrální součet má stejnou hodnotu 0. Proto $\int_0^1 f = 0$.

Věta 2.66. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$. Pak $\int_a^b f < \int_a^b g$.*

Důkaz. Tvrzení věty bude zřejmé, pokud ukážeme, že funkce h, kladná a integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, má kladný integrál. Zvolme $x_0 \in (a,b)$, který je bodem spojitosti funkce h. To lze, protože integrovatelná funkce má dokonce nekonečně mnoho bodů spojitosti, viz 2.63. Kladnost $h(x_0)$ a spojitost implikují existenci okolí $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, na kterém je $h(x) \geq \frac{h(x_0)}{2}$. Z věty 2.30 plyne

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h \;\geq\; \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2} \;= h(x_0)\delta \;> 0\,.$$

Z aditivity integrálu v mezích získáme

$$\int_a^b h = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} h}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h}_{>0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} h}_{\geq 0} > 0.$$

□

Věta 2.67. (2. věta o střední hodnotě, obecnější verze) *Nechť funkce f je integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť g je monotonní v $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\textit{existuje } \xi \in \langle a,b\rangle \textit{ tak, že } \quad \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f\,.$$

Důkaz. 1) Nejdříve dokážeme speciální případ, kdy funkce g je klesající a $g(b) = 0$. Za těchto dodatečných podmínek máme najít $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že $\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f$.

Když $g(a) = 0$, pak nutně $g(x) = 0$ na celém intervalu a tvrzení platí automaticky. Proto předpokládejme $g(a) > 0$.

Definujme

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Funkce F je spojitá na $\langle a,b\rangle$, a proto nabývá maxima a minima. Označme

$$m = \min_{\langle a,b\rangle} F \quad \text{a} \quad M = \max_{\langle a,b\rangle} F\,.$$

Uvažujme dále rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$, $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, pro jehož body $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ platí $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Připomeňme Abelovu sumaci, kterou použijeme na sumu

$$G(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \; g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Abelova sumace Nechť $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jsou libovolné posloupnosti. Položme $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ pro $k = 0, 1, \ldots$, tedy speciálně $B_0 = 0$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(B_i - B_{i-1}\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1}\big(a_{i+1} - a_i\big) B_i\,.$$

Pro úpravu $G(\sigma)$ uvažujeme $a_i = g(x_{i-1})$ a $b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$, a tedy $B_i = \int_a^{x_i} f$. Dostaneme

$$G(\sigma) = \underbrace{g(x_{n-1})}_{\geq 0}.F(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\big(-g(x_i) + g(x_{i-1})\big)}_{\geq 0} F(x_i).$$

Proto

$$G(\sigma) \leq Mg(x_{n-1}) + M \sum_{i=1}^{n-1}\big(-g(x_i) + g(x_{i-1})\big) = Mg(a).$$

Podobně odhadneme $G(\sigma)$ zdola a celkově dostaneme

$$mg(a) \leq G(\sigma) \leq Mg(a)\,. \tag{2.16}$$

Rozdíl $G(\sigma)$ a $\int_a^b fg$ lze odhadnout pomocí rozdílu horních a dolních součtu funkce g, která je podle předpokladu monotonní, a tedy integrovatelná. Využijeme také omezenosti funkce f (tj. existence K takového, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$) k odhadu

$$\Big|G(\sigma) - \int_a^b fg\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} fg\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\Big(g(x_{i-1}) - g(x)\Big)\mathrm{d}x\Big| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big|f(x)\Big(g(x_{i-1}) - g(x)\Big)\Big|\mathrm{d}x \leq K \sum_{i=1}^{n}\Big(g(x_{i-1}) - g(x_i)\Big)(x_i - x_{i-1}) = K\Big(S_g(\sigma) - s_g(\sigma)\Big)\,.$$

Nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení. Dosadíme-li do posledního odhadu za σ postupně σ_n, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|G(\sigma_n) - \int_a^b fg\Big| \leq K\Big(S_g(\sigma_n) - s_g(\sigma_n)\Big) \quad \overset{n\to\infty}{\longmapsto} \quad 0\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to+\infty} G(\sigma_n) = \int_a^b fg\,.$$

Jelikož podle (2.16) je $mg(a) \leq G(\sigma_n) \leq Mg(a)$, musí i limita posloupnosti padnout do stejných mezí,

$$mg(a) \leq \int_a^b fg \leq Mg(a) \; .$$

Číslo $\frac{\int_a^b fg}{g(a)}$ padne mezi maximum a minimum spojité funkce $F(x)$, a tedy existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že $F(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{g(a)}$, což přepsáno je

$$g(a) \int_a^\xi f = \int_a^b fg \, .$$

2) Dokažme teď větu pro libovolnou klesající funkci g. Definujeme $\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$. Funkce $\tilde{g}$ splňuje předpoklady, za kterých jsme větu dokázali v bodě 1). Proto

$$\int_a^b f\tilde{g} = \tilde{g}(a) \int_a^\xi f \; .$$

Po dosazení

$$\int_a^b \big(f\,g - f\,g(b)\big) = \int_a^b f\,g - g(b) \int_a^b f = \big(g(a) - g(b)\big) \int_a^x if = g(a) \int_a^\xi f - g(b) \int_a^\xi f$$

a po úpravě

$$\int_a^b f\,g = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_a^b f - g(b) \int_a^\xi f = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f \, .$$

3) V případě, že je g rostoucí, využijeme platnost věty pro klesající funkci $-g$. $\square$