Program cvičení na 6. týden LS 2024 výuky

Téma: Řady s obecnými členy

Na **přednášce se** se rozhodovalo o konvergenci

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{n^2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{n}$
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{\ln n}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{n}{n+1}$
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

Na **přednášce** bylo ilustrováno na výpočtu $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ s chybou menší než 10^{-8}, jak se lze někdy vyhnout používání zbytku v Taylorovi pomocí

Tvrzení: Pokud (a_n) jde monotónně k 0 a označíme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, pak

$$s = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n + \text{chyba}, \quad \text{kde} \quad |\text{chyba}| \leq |a_{N+1}|.$$

Příklady vhodné **na cvičení**

Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řady:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^3}{n-(-3)^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \sqrt[n]{n}}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p}$

5. DÚ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$

6. DÚ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(-1)^n}{n^q}$

Téma: Operace s řadami

Na přednášce bylo přerovnání řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, kde se berou dva kladné členy následované jedním záporným.

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ přerovnejte tak, že bereme jeden kladný a dva záporné členy, tj.

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) .$$

Na přednášce bude součin řad odpovídajících $e^{\alpha} \times e^{\beta}$.

Připomeňte si definici **součinové řady** a ukažte

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha^{2n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha^{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2\alpha)^{2n}$$

což odpovídá $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$.