Program cvičení na 9. - 11. týden výuky

Téma: Primitivní funkce

1 Pomocí základních vzorečků spočítejte

1. $\int (2+x^3)^2 \, \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x$
3. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, \mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$
5. $\int \max\{1, x^2\} \; \mathrm{d}x$
6. $\int \mathrm{tg}^2 x \; \mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} \; \mathrm{d}x$
8. $\int x\sqrt{2-x} \; \mathrm{d}x$
9. $\int (2x-3)^{100} \; \mathrm{d}x$
10. $\int x(1-x)^{10} \; \mathrm{d}x$
11. $\int \cos(3x)\sin(2x) \; \mathrm{d}x$

1.1 Metoda substituce

1. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} \; \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \; \mathrm{d}x$
3. $\int x e^{-x^2} \; \mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} \; \mathrm{d}x$
5. DÚ: $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} \; \mathrm{d}x$
6. DÚ: $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} \; \mathrm{d}x$

1.2 Metoda per partes

1. $\int \arcsin x \; \mathrm{d}x$
2. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \; \mathrm{d}x$
3. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \; \mathrm{d}x$

1.3 Racionální funkce

Na přednášce bylo
$\int \frac{x^5+x}{x^4+1} \; \mathrm{d}x$ - do detailů dopočítané

1. $\int \frac{x^3+6x^2+12x+6}{x^3+6x^2+11x+6} \; \mathrm{d}x$
2. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \; \mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{x^3+1} \; \mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \; \mathrm{d}x$
5. DÚ: $\int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^3} \; \mathrm{d}x$
6. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} \; \mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{x^6+1} \; \mathrm{d}x$
8. $\int \frac{x}{x^8-1} \; \mathrm{d}x$
9. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1} \; \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \; \mathrm{d}x$

1.4 Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \; \mathrm{d}x$

1. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}} \; \mathrm{d}x$ substituce $\sqrt[4]{2x-1} = y$
2. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)^2}} \; \mathrm{d}x$ substituce $\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = y$
3. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{2+x^3}} \; \mathrm{d}x$ u tohoto příkladu jsou parametry takové, že podle Čebyševa nelze najít primitivní funkci v elementárním tvaru. Proto: udělejte rozvoj do mocninné řady a integrujte člen po členu.
4. DÚ: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \; \mathrm{d}x$ substituce $\sqrt[6]{x} = y$

1.5 Integrály s druhou odmocninou

Na přednášce budou **Eulerovy susbtituce**.

1. $\int \frac{1}{2x-1+\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x$ Euler

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$ zkuste per partes
4. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\ \mathrm{d}x$
5. DÚ: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-5}}\ \mathrm{d}x$
6. DÚ: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\ \mathrm{d}x$ lze si život usnadnit vhodnou substitutcí $x^2 = y$.
7. DÚ: $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x$

1.6 Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$

1. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\ \mathrm{d}x$ susbtituce $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = y$
2. $\int \frac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2)^2}\ \mathrm{d}x$ je vidět, že pomůže susbtituce $\mathrm{tg}\, x = y$.

   V případě symetrí funkce $R(x, y)$ popsaných níže lze využít i jiné substituce, které často dají polynomy nižšího stupně než univerzálně fungující substituce $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = y$.

   $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ vynucuje takový tvar, že je vidět, že pomůže $\mathrm{tg}\, x = y$

   $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ vynucuje takový tvar, že je vidět, že pomůže $\cos x = y$ a

   $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ vynucuje takový tvar, že je vidět, že pomůže $\sin x = y$ a

3. typ $\int \sin^3 x\ \mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x \cos^3 x\ \mathrm{d}x$ a $\int \sin^2 x \cos^4 x\ \mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\ \mathrm{d}x$ pomůže substituce $\sin^2 x = y$

5. DÚ: $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ \mathrm{d}x$