Program cvičení na 7. a 8. týden LS 2024 výuky

Téma: Obor konvergence mocninné řady

1. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$
2. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\, x^n$
3. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$.
4. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$
5. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\, x^n$

Téma: Rozvoj funkce do mocninné řady

Z přednášky víme rozvoje

- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ pro každé $x \in (-1, 1\rangle$
- $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$ pro každé $x \in (-1, 1)$ plus krajní body v závislosti na α

Při rozvojích vždy určujte obor konvergence, včetně vyšetření konvergence **v krajních bodech** intervalu

1. Rozviňte do mocninné řady $\sin x$ klasicky důkazem, že Lagrangeův zbytek $R_n(x) \to 0$, když $n \to \infty$, a to pro každé $x \in \mathbb{R}$.
2. Zderivováním rozvoje pro $\sin x$ odvoďte rozvoj pro $\cos x$.
3. Rozvoj $f(x) = \ln(2+3x)$ v bodě $a = 1$
4. Rozvoj $f(x) = \arcsin x$ v bodě $a = 0$ pomocí derivování.
5. Rozvoj $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ v bodě $a = 0$

6. Rozvoj $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$ v bodě $a = 0$
7. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = (1+x)e^x$ v bodě $a = 0$.
8. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$ v bodě $a = 0$.
9. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ v bodě $a = 0$.
10. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$ v bodě $a = 0$.
11. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ v bodě $a = 0$

Téma: Součet řady

1. Sečtěte mocninnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$
2. Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
3. Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, n$