Funkce zadané parametricky

Daný je interval I, na něm **spojité** funkce $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$, kde funkce φ je navíc **prostá na** I. Studujeme funkci zadanou předpisem

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \,.$$

Tedy pro definiční obor resp. obor hodnot funkce f platí

$$D_f = \varphi(I) \quad \text{a} \quad H_f = \psi(I)$$

O funkci f říkáme, že je **zadaná parametricky** $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Zajímá nás graf této funkce, tj. množina

$$\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in \varphi(I)\} = \{\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \mid t \in I\}.$$

Příklad 1: Snadno se přesvědčíme (např. derivováním funkce φ), že při

$$x = \varphi(t) = 3t - t^3 \quad \text{a} \quad y = \psi(t) = 2t - t^2 \,, \quad \text{kde} \quad I = \langle 1, +\infty),$$

je funkce $\varphi(t)$ ostře klesající na $I = \langle 1, +\infty)$, tedy prostá. Proto je funkce $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ dobře definovaná. Jednoduše zjistíme definiční obor funkce $D_f = \varphi(I)$. Protože φ je klesající a spojitá na I, určíme $\varphi(I)$ spočítáním limit v obou krajních bodech intervalu I tj., $D_f = (-\infty, 2\rangle$. Úkolem je zjistit graf této funkce. Abychom převedli úlohu na známý postup ze zimního semestru, potřebovali bychom najít explicitní vyjádření $\varphi^{-1}(x)$, tj. vyjádřit t pomocí x z rovnice $x = 3t - t^3$. To půjde težko. A jak si ukážeme, ani to není nutné. Teď příklad přerušíme.

Víme, že funkce f je spojitá na celém D_f, jelikož je složením dvou spojitých funkcí. Pro vyšetření grafu spojité funkce potřebujeme umět spočítat

1. limity funkce $f(x)$ v krajních bodech intervalu D_f,
2. limity funkce $\frac{f(x)}{x}$ v bodě $\pm\infty$, pokud je tento bod hromadným bodem definičního oboru D_f (kvůli zjištění asymptot),
3. první derivaci $f'(x)$ (kvůli zjištění extrému a monotonie funkce)
4. druhou derivaci $f''(x)$ (kvůli zjištění konvexnosti a konkávnosti funkce)
5. Průsečíky funkce s osami.

Jak postupovat, když neumíme vyjádřit explicitně $\varphi^{-1}(x)$?

1. Výpočet limity v krajním bodě definičního oboru:

   Tvrzení: Nechť x_0 je krajním bodem intervalu D_f. Pak zřejmě $x_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t)$, kde t_0 je jednim ze dvou krajních bodů intervalu I. Jelikož φ je ostře monotónní, nutně $t_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi^{-1}(x)$. Z věty o limitě složené funkce platí

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to t_0} \psi(t).$$

2. Předpokládejme, že $+\infty$ je krajním bodem intervalu $D_f = \varphi(I)$. Pak $+\infty = \lim_{t\to t_0} \varphi(t)$, kde t_0 je krajním bodem intervalu I. Pak podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(\varphi^{-1}(x))}{\varphi(\varphi^{-1}(x))} = \lim_{t\to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}.$$

Případ, kdy $-\infty$ je krajním bodem intervalu $D_f = \varphi(I)$, je analogický.

3. Výpočet derivace funkce f v bodě $x_1 \in D_f$. Protože $D_f = \varphi(I)$, existuje $t_1 \in I$ takový, že $x_1 = \varphi(t_1)$. Předpokládejme, že ψ i φ jsou diferencovatelné v bodě t_1 a $\dot{\varphi}(t_1) \neq 0$. Abychom se vyhnuli nedorozumění, pokud budeme funkce φ a ψ derivovat podle jejich proměnné z intervalu I, tak budeme derivaci vyznačovat tečkou místo čárky. Tu ponecháme na derivaci funkce f pro proměnnou z intervalu $\varphi(I)$. Z vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce dostaneme

$$f'(x_1) = \big(\psi(\varphi^{-1}(x_1))\big)' = \dot{\psi}\big((\varphi^{-1}(x_1)\big)\big(\varphi^{-1}(x_1)\big)' = \frac{\dot{\psi}\big(\varphi^{-1}(x_1)\big)}{\dot{\varphi}\big(\varphi^{-1}(x_1)\big)} = \frac{\dot{\psi}(t_1)}{\dot{\varphi}(t_1)}, \quad \text{kde} \quad x_1 = \varphi(t_1).$$

4. Pro výpočet druhé derivace funkce f'' v bodě x_1 už stačí aplikovat pravidlo odvozené pro první derivaci na funkci zadanou parametricky takto: $y = \xi(t) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$ a $x = \varphi(t)$. Tedy

$$f''(x_1) = \frac{\dot{\xi}(t_1)}{\dot{\varphi}(t_1)} = \frac{\text{zderivuj první derivaci } \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \text{ podle } t \text{ a dosaď bod } t_1}{\dot{\varphi}(t_1)}$$

5. Průsečíky funkce s osami jsou body typu $(0, f(0))$, pokud $0 \in D_f$ 0 nebo $(x, 0)$, pokud $0 \in H_f$ a $f(x) = 0$. Průsečíky získáme tak, že hledáme kořeny rovnice $\varphi(t) = 0$ takové, že $t \in I$. Tato řešení dají průsečík s osou y a jsou tvaru $(0, \psi(t))$. Pokud $t \in I$ je kořenem rovnice $\psi(t) = 0$, pak má funkce průsečík s osou x, který je tvaru $(\varphi(t), 0)$.

Ilustrujme předchozí návod na příkladě uvedeném výše.

Příklad 1 (pokračování): Už jsme odvodili, že $D_f = (-\infty, 2\rangle$, přičemž

$$2 = \lim_{t\to1} \varphi(t) = \lim_{t\to1}(3t - t^3) \quad \text{a} \quad -\infty = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty}(3t - t^3).$$

Pamatujme si, že krajní bod $x_0 = 2$ definičního oboru D_f vznikl z krajního bodu $t_0 = 1$ intervalu $I = \langle 1, +\infty)$ a krajní bod $x_0 = -\infty$ definičního oboru D_f vznikl z krajního bodu $t_0 = +\infty$ intervalu I. Proto pro limity funkce f v krajních bodech definičního oboru platí

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{t\to1} \psi(t) = \lim_{t\to1}(2t - t^2) = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to+\infty}(2t - t^2) = -\infty.$$

Zkoumat existenci asymptoty tvaru $y = kx + q$ pro funkci f má smysl pouze v bodě $-\infty$. Kandidát na směrnici je

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t - t^2}{3t - t^3} = 0.$$

Parametr q musí být konečný a měl by splňovat

$$q = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - 0.x\big) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} (2t - t^2) = -\infty.$$

Tedy konečné q nemáme a funkce f nemá asymptotu.

Abychom určili extrémy a monotonii funkce f, spočítejme její derivaci

$$f'(x) = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} = \frac{2-2t}{3-3t^2} = \tfrac{2}{3}(t+1)^{-1}, \qquad \text{kde } x = t - t^3 \text{ a } \quad t \in \langle 1, +\infty).$$

Tedy $f'(x) > 0$ pro každé $x \in D_f$, a proto f je na celém svém definičním oboru ostře rostoucí. Maximální hodnota funkce je $f(2) = \psi(1) = 1$.

Pro druhou derivaci platí

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{3}(t+1)^{-2}}{3-3t^2} = \frac{2}{9(t+1)^3(t-1)}, \qquad \text{kde } x = t - t^3 \text{ a } \quad t \in \langle 1, +\infty).$$

Opět $f''(x) > 0$ pro každé $x \in D_f$, a proto f je na celém svém definičním oboru ostře konvexní.

Průsečíky získáme řešením rovnic $\varphi(t) = 3t - t^3$ a $\psi(t) = 2t - t^2$. První rovnice má 3 řešení: $0, \pm\sqrt{3}$, ale pouze řešení $\sqrt{3}$ je z intervalu I. To odpovídá půsečíku $(0, \psi(\sqrt{3})) = (0, 2\sqrt{3} - 3)$. Druhá rovnice má 2 řešení: $0, 2$. Pouze 2 patří do I. Odovídající průsečík je $(\varphi(2), 0) = (-2, 0)$.

Zkuste si sami teď namalovat graf funkce.

Mírně ted **pozměníme úlohu**: Je daný interval I a funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ spojité na intervalu I. Úkolem je zobrazit množinu bodů

$$\{(x,y) \,|\, (\exists t \in I)\ x = \varphi(t) \text{ a } y = \psi(t)\} = \{\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \,|\, t \in I\}$$

Změna spočívá v tom, že nevyžadujeme, aby funkce φ byla prostá na intervalu I. Tím pádem k ní nemusí existovat inverzní funkce. Podaří-li se nám, napsat interval I jako sjednocení konečně mnoha intervalů

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k \ \text{ takových, že } \ \varphi \text{ zúžená na } \ I_j \ \text{ je prostá pro každé } \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

můžeme definovat k parametricky zadaných funkcí f_j předpisem: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, kde $t \in I_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$ a graf každé funkce vyšetřit zvášť. Sjednocení těchto k grafů pak bude tvořit množinu, kterou jsme měli popsat.

Příklad 2: Vyšetřete množinu bodů

$$\{(3t - t^3, 2t - t^2) \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

Derivace funkce $\varphi(t) = 3t - t^3$ je $\dot{\varphi}(t) = 3 - 3t^2$. Derivace je spojitá a mění znaménku pouze v bodech -1 a 1. Lze najít 3 intervaly, na kterých je funkce φ ostře monotónní, a tedy prostá. Budeme proto definovat tři funkce pro intervaly

$$I_1 = (-\infty, -1\rangle, \quad I_2 = (-1, 1), \quad I_3 = \langle 1, +\infty)$$

a podle výše popsaného postupu vyšetříme každou funkci zvlášť. Funkci f_3 pro interval I_3 už jsme vyšetřili v Příkladě 1.

První a druhá derivace všech tří funkcí mají stejný předpis

$$f_i'(x) = \tfrac{2}{3}(t+1)^{-1} \quad \text{a} \quad f_i''(x) = \frac{2}{9(t+1)^3(t-1)}, \quad \text{kde } x = t - t^3,$$

ale každá funkce sahá pro t do jiného intervalu. Proto například funkce f_2, kde $t \in I_2 = (-1, 1)$ má definiční obor $D_{f_2} = (-2, 2)$ a je na celém definičním oboru rostoucí a konkávní. Zatímco f_1, kde $t \in (-\infty, -1\rangle$ má definiční obor $D_{f_1} = \langle -2, +\infty)$, a je na celém definičním oboru klesající a konvexní.

Seznam křivek na domácí zpracování

1. $x^4 + y^4 = 2xy$
2. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$
3. $(2x + y)^2(x + y) = x$
4. $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$
5. $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$
6. $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$
7. $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$
8. $y^4 - 2xy^2 = 3x^2 - x^4$
9. $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$
10. $x^2y^2 + x - 2y = 0$
11. $x^5 + y^5 = xy^2$
12. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$
13. $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$
14. $(x^2 - y^2)^2 = 2x$
15. $x^4 - y^4 = 4x^2y$
16. $x^3y^3 = x - y$
17. $xy(x - y) + x + y = 0$
18. $x^2(x - y)^2 + y = 0$
19. $x^2(x^2 + y^2) = 4(x - y)^2$
20. $x^4 - y^4 + xy = 0$
21. $x^4 + y^4 = 8xy^2$